Софийски университет “св. Климент Охридски”
Физически факултет
Катедра Теоретична физика

Бакалавърска теза

на

Светослав Стойчев Иванов, фак. № 8660

Тема:

Характери на унитарните непреводими представяния с положителна енергия на суперконформната алгебра за D=4

Научен ръководител: проф. д.ф.н. Владимир Добрев

София, 2005

Съдържание

1 Увод

Напоследък суперконформните теории на полето за различни размерности са от особен интерес. С най-голямо значение са тези с $D \leqq 6$, защото в тези случаи породените суперконформни алгебри задоволяват теоремата на Хаг-Лопушански-Сониус [1]. Това прави класификацията на унитарните непреводими представяния на тези алгебри много важни. Доскоро подобна класификация беше известна само за $D = 4$ суперконформните алгебри $su(2, 2/1)$ [2] и $su(2, 2/N)$ [3, 4] (за произволни N). Неотдавна, класификацията за $D = 3$ (за четни N), $D = 5$ и $D = 6$ (за $N = 1, 2$) беше направена в [5] и най-накрая случаят $D = 6$ (за произволни N) беше изчерпан в [6].

След като вече сме определили унитарните непреводими представяния на една (супер-)алгебра, следващата стъпка е да се намерят техните характери, т.к. те дават спектъра, който е важен за приложенията. Тази работа дава изчерпателен резултат за характерите на всички унитарни непреводими представяния на конформните суперoccалгебри $su(2, 2/N)$ за $D = 4$. От математическа гледна точка, въпросът за представянията с конформна размерност над „унитарната точка“ е решен за съответната комплексна супералгебра $sl(4/N)$. Но за $su(2, 2/N)$ дори представянията над тази точка се редуцират за малки стойности на спина и изоспина.

От казаното горе става ясно, че е необходима детайлна картина на изследваните от нас представяния. За щастие тя е дадена в [3, 7, 8, 4]. Следвайки тези работи и най-вече [9], в тази теза представяме подробна информация за представянията на $su(2, 2/N)$ за $D = 4$ и, използвайки структурата на Верма–модулите, извеждаме формули за характерите.

2 Въведение в алгебрите. Алгебри на Ли

2.1 Дефиниция на алгебра. Типове алгебри. Алгебри на Ли. Примери

Следваме [10]. Нека $\mathbb{F}$ е поле с характеристика 0. Наричаме $\mathcal{A}$ алгебра над $\mathbb{F}$, ако $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{F}$, в което допълнително е дефинирана билинейна операция: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \in (X, Y) \to X \cdot Y \ni \mathcal{A}$, наречена умножение; $X \cdot Y$ се нарича произведение на $X, Y \in \mathcal{A}$. Алгебрата $\mathcal{A}$ се нарича *асоциативна*, ако $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ за всички $X, Y, Z \in \mathcal{A}$. Алгебрата $\mathcal{A}$ се нарича *алгебра на Ли*, ако следните условия са изпълнени:

$$X \cdot X = 0\,, \tag{2.1а}$$

$$X \cdot (Y \cdot Z) + Y \cdot (Z \cdot X) + Z \cdot (X \cdot Y) = 0\,. \tag{2.1б}$$

Първото е т.нар. условие за антикомутативност, а второто - тъждество на Якоби. От (2.1а) следва

$$0 = (X+Y) \cdot (X+Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y = X \cdot Y + Y \cdot X\,,$$

т.е.

$$X \cdot Y = -Y \cdot X\,. \tag{2.2}$$

Всъщност (2.2) е еквивалентно на (2.1а), ако $char\mathbb{F} \neq 2$. Условие (2.1б) означава, че алгебрите на Ли не са асоциативни.

Всяка асоциативна алгебра е алгебра на Ли по отношение на операцията:

$$[X, Y] \equiv X \cdot Y - Y \cdot X\,, \tag{2.3}$$

наречена комутатор на X и Y. По-нататък, когато става въпрос за алгебри на Ли, ще означаваме произведението на X и Y с $[X, Y]$. Тогава преписваме (2.1) така:

$$[X,\ X] = 0\,, \tag{2.4а}$$

$$[X,\ [Y,\ Z]] + [Y,\ [Z,\ X]] + [Z,\ [X,\ Y]] = 0\,. \tag{2.4б}$$

Ако $\mathcal{A}$ е крайномерна алгебра, произведението на базисните й елементи X_i определя по линейност произведението между кои да е два елемента в $\mathcal{A}$:

$$X_i \cdot X_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k\,, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{F}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,, \tag{2.5}$$

където $n = dim\,\mathcal{A}$. Елементите c_{ij}^k се наричат *структурни константи* на $\mathcal{A}$ и определят напълно алгебрата (по отношение на базиса $\{X_i\}$; преобразуват се като тензори). В случай на алгебри на Ли от (2.1) и (2.5) получаваме следното ограничение за структурните константи: [1]

[1] В случай на алгебри на Ли, поради връзката, представена по-долу, c_{ij}^k образуват преопределена система. Следователно, за да се възстанови алгебрата, достатъчно е да се знае системата от корени Δ. Тя обаче притежава определена симетрия, поради което минималната необходима информация за алгебричната структура се носи от т.нар. картанова матрица, на която се съпоставя т.нар. диаграма на Динкин. Посредством диаграми на Динкин се прави класификация на полупростите алгебри на Ли.

$$c_{ij}^{k} \; = \; -c_{ji}^{k} \tag{2.6а}$$
$$c_{kl}^{n}c_{mn}^{p} \; + \; c_{lm}^{n}c_{kn}^{p} \; + \; c_{mk}^{n}c_{ln}^{p} \; = \; 0\,. \tag{2.6б}$$

Нека $\mathcal{B}$ е векторно подпространство на $\mathcal{A}$; $\mathcal{B}$ се нарича *подалгебра* на $\mathcal{A}$, ако $X \cdot Y \in \mathcal{B}$ за всички $X, Y \in \mathcal{B}$. Нека $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Дефинираме произведението

$$\mathcal{B} \; \cdot \; \mathcal{C} \; \equiv \; \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i Y_i \; \cdot \; Z_i \; : \; k \in \mathbb{N}, \; a_i \in \mathbb{F}, \; Y_i \in \mathcal{B}, \; Z_i \in \mathcal{C} \right\}. \tag{2.7}$$

Подалгебрата $\mathcal{I}$ на $\mathcal{A}$ се нарича *идеал* на $\mathcal{A}$, ако $\mathcal{A} \cdot \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A} \subset \mathcal{I}$.

Нека $\mathcal{A}$ е алгебра и $\mathcal{I}$ е неин идеал. Тогава фактор-векторното пространство $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ е също алгебра, наречена *фактор-алгебра*, с операция $(X + \mathcal{I}) \cdot (Y + \mathcal{I}) \; = \; X \cdot Y + \mathcal{I}$.

Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две алгебри. Векторното пространство $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{(X, Y) \; : \; X \in \mathcal{A}, \; Y \in \mathcal{B}\}$ е алгебра с операция $(X_1, Y_1) \cdot (X_2, Y_2) \equiv (X_1 \cdot X_2, Y_1 \cdot Y_2)$. Алгерата $\mathcal{A} \; \oplus \; \mathcal{B}$ се нарича *пряка сума* на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Ендоморфизъмът $\mathcal{D}$, дефиниран в $\mathcal{A}$, се нарича *производна* на $\mathcal{A}$, ако $\mathcal{D}(X \cdot Y) \; = \; (\mathcal{D} \cdot X) \cdot Y + X \cdot (\mathcal{D} \cdot Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$. Ако $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ са производни на $\mathcal{A}$, то и $\mathcal{D}_1 \; \circ \; \mathcal{D}_2 \; - \; \mathcal{D}_2 \; \circ \; \mathcal{D}_1$ е също производна на $\mathcal{A}$.

За алгебрата на Ли $\mathcal{G}$ се дефинира *представяне* във векторното пространство V, което е линейно изображение $\varphi \; : \; \mathcal{G} \to Aut\, V$[2], такова че $\varphi\left([X, Y]\right) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \equiv \varphi(X) \circ \varphi(Y) - \varphi(Y) \circ \varphi(X)$. Представянето φ се нарича преводимо (или просто), ако V съдържа нетривиално подпространство V', $0 \neq V' \neq V$, което е инвариантно под действието на φ, т.е. $\varphi(Y)v \in V'$ за всички $Y \in \mathcal{G}$, $v \in V'$. В противен случай φ се нарича *непреводимо*. Представянето се нарича *напълно преводимо* (или *полупросто*), ако V може да се представи като пряка сума на инвариантни подпространства. Представянето се нарича *неразложимо*, ако е преводимо, но не напълно преводимо.

Важно значение има т.нар. *присъединено представяне*, действащо от $\mathcal{G}$ в $\mathcal{G}$:

$$adX \; : \; \mathcal{G} \; \longrightarrow \; \mathcal{G}\,; \; adX \; : \; Y \; \longrightarrow \; [\; X, \; Y \;], \; X, Y \in \mathcal{G}\,. \tag{2.8}$$

Подалгебрата $\mathcal{Z} \subset \mathcal{G}$ се нарича център на $\mathcal{G}$, ако е максималната абелева подалгебра на $\mathcal{G}$, такава че $[X, Y] = 0$, $\forall X \in \mathcal{Z}$, $\forall Y \in \mathcal{G}$.

Алгебрата на Ли $\mathcal{G}$ се нарича *проста*, ако не е абелева и няма идеали с изключение на тривиалните (единичния елемент и цялата алгебра). $\mathcal{G}$ се нарича *полупроста*, ако няма абелеви идеали с изключение на единичния елемент.

Алгебрата на Ли $\mathcal{G}$ се нарича *редуктивна*, ако може да се разложи така $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \oplus \; [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, където $\mathcal{Z}$ е центърът на $\mathcal{G}$ и $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ е идеал (полупрост) на $\mathcal{G}$. Тогава, ако $\mathcal{Z} = 0$, редуктивната алгебра е полупроста и обратно. Очевидно една крайномерна алгебра на Ли е редуктивна, тогава и само тогава, когато нейното присъединено представяне е напълно преводимо.

Нека $\mathcal{G}$ е крайномерна алгебра на Ли. Дефинираме за всички $X, Y \in \mathcal{G}$ билинейна симетрична форма $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{C}$, наречена форма на Килинг за $\mathcal{G}$, по следния начин:

$$B(X, Y) \; \equiv \; tr\, adX\, adY\,. \tag{2.9}$$

[2] $Aut\, V$ означава множеството на всички автоморфизми - изоморфни изображения на V в себе си

Важно значение има следната теорема:

Теорема 2.1 *Крайномерната алгебра на Ли $\mathcal{G}$ е полупроста, тогава и само тогава, когато формата B е неизродена.*

2.2 Структура и система от корени на полупростите алгебри на Ли. Базис на Картан-Вайл. Генератори на Шевалие

Нека $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \oplus \mathcal{Z}$ е крайномерна редуктивна алгебра на Ли над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, където $\mathcal{G} = [\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0]$ е полупрост идеал на $\mathcal{G}_0$, а $\mathcal{Z}$ е центърът на $\mathcal{G}_0$. Анализът на структурата на $\mathcal{G}_0$ е базиран на специален клас комутативни (абелеви) подалгебри $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{G}_0$. Подалгебрата $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{G}_0$ се нарича *подалгебра на Картан* на $\mathcal{G}_0$, ако:

1. $\mathcal{H}_0$ е максималната абелева подалгебра на $\mathcal{G}_0$
2. операторите $ad\,X$ са диагонални в $\mathcal{G}_0$ за всички $X \in \mathcal{H}_0$.

Ясно е, че $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{Z}$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{Z}$, където $\mathcal{H}$ е картановата подалгебра на $\mathcal{G}$. Всяка полупроста алгебра на Ли има нетривиална подалгебра на Картан (теорема).

Изхождайки от дефиницията на картанова подалгебра, елементите $ad\,H$, $H \in \mathcal{H}$ могат да бъдат диагонализирани едновременно. Означаваме с $\mathcal{H}^*$ дуалната алгебра на $\mathcal{H}$, т.е. алгебрата от функционали, действащи на $\mathcal{H}$. Нека за $\alpha \in \mathcal{H}^*$ да имаме

$$\mathcal{G}_\alpha = \{X \in \mathcal{G} \;:\; [H, X] = \alpha(H)X, \quad \forall H \in \mathcal{H}\}\,. \tag{2.10}$$

Очевидно $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}$. Нека $\Delta = \{\alpha \in \mathcal{H}^* \;:\; \alpha \neq 0,\ \mathcal{G}_\alpha \neq \{0\}\}$. Множеството Δ се нарича *система от корени* на $\mathcal{G}$ по отношение на $\mathcal{H}$, а елемент от Δ се нарича *корен*.

Валидно е следното разложение:

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_\alpha\,. \tag{2.11}$$

За всяко $\lambda \in \mathcal{H}^*$ дефинираме единствено $H_\lambda \;:\; B(H_\lambda, H) = \lambda(H)$, $\forall H \in \mathcal{H}$. Означаваме $\mathcal{H}_R = \sum_\alpha \mathbb{R} H_\alpha$. Нека $H_1, \ldots, H_\ell$ е базис в $\mathcal{H}_R$. Извършваме лексикографическо подреждане в $\mathcal{H}_R^*$, т.е. за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{H}_R^*$, $\lambda_1 > \lambda_2$, ако $\exists k : 0 \leqq k \leqq \ell - 1$, такова че $\lambda_1(H_i) = \lambda_2(H_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $\lambda_1(H_{k+1}) > \lambda_2(H_{k+1})$. Ако $\lambda > 0$, казваме, че λ е положителен.

Нека $\Delta^+ \equiv \{\alpha \in \Delta \;:\; \alpha > 0\}$, $\Delta^- \equiv \{\alpha \in \Delta \;:\; \alpha < 0\}$; тогава $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$, $\Delta^+ \cap \Delta^- = \emptyset$.

Коренът $\alpha \in \Delta^+$ се нарича *прост*, в случай, че не може да се разложи по начина $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \Delta^+$. Очевидно простите корени формират базис в Δ^+, т.е. за всеки $\alpha \in \Delta^+$ имаме $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Те образуват базис и на Δ^- с $n_i \in \mathbb{Z}_-$. Следователно простите корени образуват базис на Δ, както и на $\mathcal{H}^*$.

Да разгледаме генераторите, съответстващи на простите корени (виж (2.10)): $\tilde{E}_i$, $\tilde{F}_i$, $\tilde{H}_i$, $i = 1, \ldots, \ell = dim\,\mathcal{H}$, с комутационни съотношения:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{H}_i, \tilde{H}_j\right] &= 0, & \left[\tilde{H}_i, \tilde{E}_j\right] &= \alpha_j(\tilde{H}_i)\tilde{E}_j, \\
\left[\tilde{H}_i, \tilde{F}_j\right] &= -\alpha_j(\tilde{H}_i)\tilde{F}_j, & \left[\tilde{E}_i, \tilde{F}_j\right] &= \delta_{ij}\tilde{H}_i,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Тези елементи генерират алгебрата $\mathcal{G}$ и образуват т.нар. базис на *Картан-Вайл.*

Генераторите на Шевалие се бележат с $X_i^{\pm}$, $i = 1, \ldots, \ell$, и се изразяват чрез горните така:

$$\begin{aligned} X_i^+ &= \sqrt{\frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}} \tilde{E}_i \\ X_i^- &= \sqrt{\frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}} \tilde{F}_i \\ H_i &= \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \tilde{H}_i = \tilde{H}_i^{\vee} . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Генераторите на Шевалие имат следните комутационни съотношения:

$$\begin{aligned} & [H_i, H_j] = 0 \\ & \left[H_i, X_j^{\pm}\right] = \pm a_{ij} X_j^{\pm} = \pm(\alpha_i^{\vee}, \alpha_j) X_j^{\pm} , \quad \alpha_i^{\vee} \equiv 2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i) \\ & \left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{ij} H_i . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Разполагайки с горната система (2.12) сме в състояние да възстановим цялата алгебра $\mathcal{G}$, налагайки допълнителна система от ограничения, наречени релации на Сер (Serre) при $i \neq j$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (X_i^{\pm})^k \ X_j^{\pm} \ (X_i^{\pm})^{n-k} = 0 , \quad i \neq j , \quad n = 1 - a_{ij} . \tag{2.15}$$

Тази система гарантира, че не се генерират несъществуващи непрости вектори, т.е. такива, които да не съответстват на непрост корен.

2.3 Реални форми на алгебрите на Ли и комплексификация

Следваме [11]. Нека е зададена комплексната алгебра $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. Алгебрата $\mathcal{G}$ се нарича *реална форма* на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, ако

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{G} \oplus i\mathcal{G} ,$$

т.е. всеки елемент $z \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ може еднозначно да се представи във вида $z = x + iy$, $x, y \in \mathcal{G}$. За една комплексна алгебра могат да бъдат дефинирани повече от една реални форми.

Ако σ е антилинеен инволютивен автоморфизъм на алгебрата $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ (т.е. $\sigma^2 = \mathbb{1}$, $\sigma(\lambda z) = \bar{\lambda}\sigma(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$), то реалната форма на алгебрата $\mathcal{G}$ е множеството от неговите неподвижни точки. На всяка реална форма на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ съответства автоморфизъм на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ от горния тип.

Автоморфизмите, съответстващи на две изоморфни реални форми, са спрегнати един на друг с елемент от $Aut\,\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. Следователно всички неизоморфни реални форми могат да се класифицират чрез нееквивалентните в $Aut\,\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ инволютивни автоморфизми.

Комплексификация $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ на алгебрата на Ли $\mathcal{G}$ се нарича $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{G} \oplus i\mathcal{G}$, където $\mathcal{G}$ е алгебра на Ли над $\mathbb{R}$, а алгебричната операция в $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ се задава така:

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2]) + i\,([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2])\ .$$

3 Конформни преобразувания и конформна алгебра

3.1 Конформни преобразувания

Следваме [17]. Конформните преобразувания са преобразувания върху пространството, запазващи ъгъла между две пресичащи се криви.

Нека имаме множество X от елементи, принадлежащи на D-мерно пространство с метрика η:

$$x = (x^0, \cdots x^{D-1}) \in X \tag{3.16}$$

и сме дефинирали изображение $G : X \to X' \ni x' = (x'^0, \cdots x'^{D-1})$ в друго множество с метрика η'. Изображението G е конформно, ако:

$$\eta'_{\mu_1\mu_2}(x') = \frac{\partial g^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial g^{\nu_2}}{\partial x^{\mu_2}} \eta_{\nu_1\nu_2}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu_1\mu_2}(x)\,, \tag{3.17}$$

т.е. при преобразувания тензорът $\eta_{\mu_1\mu_2}(x)$ се запазва с точност до локален множител.

Доказва се, че конформните преобразувания образуват (проста) група. Нека отбележим конформната група за $2h$-мерното пространство на Минковски M^{2h} с $\mathcal{C}(M^{2h})$. Разглеждаме инфинитезимално конформно преобразувание

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

и налагаме ограничение върху добавъчния член, породено от дефиниционното представяне на $\mathcal{C}(M^{2h})$ (3.17). Получаваме

$$\partial_\nu \partial_\mu \delta x^\mu = const$$

и следователно

$$\delta x^\mu = a^\mu + b^\mu_\nu x^\nu + c^\mu_{\nu\rho} x^\nu x^\rho\,,$$

където

- a^μ е транслация и върху нея няма ограничения;
- $b^\mu_\nu = \lambda\eta^\mu_\nu + m^\mu_\nu,\ \ tr\, m^\mu_\nu = 0$. Първият член съответства на дилатация, т.е. покоординатно умножение с λ, а вторият – на ротация. Съвкупността от всички транслации, ротации и дилатации образуват т.нар. подгрупа на *Вайл (Weyl)*, която съдържа всички линейни трансформации. За $h = 2$ първите две образуват 10-параметричната (4+6) подгрупа на Поанкаре, за която мащабният фактор удовлетворява $\Omega^2(x) = 1$;
- $c^\mu_{\nu\rho}$ поражда нов вид трансформации, непренадлежащи на $GL(M^{2h})$, наречени *специални конформни трансформации* (SCT). Общият им вид е

  $$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b\cdot x + b^2 x^2}\,.$$

  За по-интуитивното им въвеждане, те се представят посредством т.нар. инверсия - $x^\mu \longrightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$, по следния начин: специалната конформна трансформация е еквивалентна на действие с инверсия, която се намира между две последователни транслации.

Следователно $\mathcal{C}(M^{2h})$ се състои от следните преобразувания (в дясно е посочено действието им върху M^{2h}):

1. Транслации: $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$
2. Ротации: $x^\mu \to M^\mu_\nu x^\nu$ (M^μ_ν - формират представяне на лоренцовата група)
3. Дилатации: $x^\mu \to \lambda x^\mu$
4. Специални конформни трансформации (SCT): $x^\mu \longrightarrow \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1-2b\cdot x+b^2x^2}$

Конформните преобразувания не са наблюдавана симетрия в природата, но са важни за полевите теории, поради следните причини [13]:

1. Конформната симетрия спомага за намиране и класификация на решения, т.к. съществуват конформно-инвариантни части от лагранжиана на взаимодействие (несъдържащи размерни параметри: маса или размерни константи на връзката) и следователно съответните решения са свързани с конформно преобразувание. Удобно е конформната симетрия да се разглежда като приближение като се отчита влиянието на допълнителния несиметричен член.

2. Физически смислените теории на полето при високи енергии са конформно инвариантни. Пертурбацията към конформната симетрия лесно се прилага в подобни случаи.

3.2 Конформна алгебра

Лесно се намира явният вид на генераторите, действащи в M^{2h}:

1. Транслации: $P_\lambda = -i\partial_\lambda$
2. Ротации: $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$
3. Дилатации: $D = -ix^\mu\partial_\mu$
4. SCT: $K_\mu = -(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$

Ненулевите комутационни съотношения са:

$$[D,P_\mu] = +iP_\mu, \quad [K_\mu,P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}), \quad [P_\rho,M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu),$$

$$[D,K_\mu] = -iK_\mu, \quad [K_\rho,M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu),$$

$$[M_{\mu\nu},M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\nu\rho})$$

Дефинираме

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad J_{-1,0} = D, \quad J_{-1,\mu} = -\frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu)$$

и задаваме алгебрата в следната по-компактна форма:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{cd}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}),$$

след което забелязваме, че това са комутаторите на алгебрата на групата $SO(2h,2)$, съответстваща на псевдоротации в по-високо по размерност (2h+2) пространство, т.е. свързаната част на $\mathcal{C}(M^{2h})$, действаща в M^{2h} (със сигнатура $(2h-1,1)$), е изоморфна на простата група $SO(2h,2)$. Формализмът на третиране на $\mathcal{C}(M^{2h})$ като подгрупа на $O(2h,2)$ е развит от Дирак.

4 Представяния

4.1 Тензорна алгебра. Универсална обвиваща алгебра

Следваме [10]. Нека E е крайномерно векторно пространство над полето $\mathbb{F}$. *Тензорната алгебра* над E се дефинира като следната безкрайномерна асоциативна алгебра:

$$T(E) \;=\; \mathop{\oplus}_{k=0}^{\infty} E^{\otimes k}, \quad E^{\otimes k} \equiv \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{k}, \quad E^{\otimes 0} \equiv \mathbb{F}\,, \tag{4.18}$$

където алгебричната операция се дефинира така:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_\ell) \;=\; x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_\ell$$

и се продължава по линейност за цялата алгебра.

По-нататък ще пишем $v_1 \ldots v_r \equiv v_1 \otimes \ldots \otimes v_r$. Елементите $t \in E^{\otimes k}$ се наричат ковариантни тензори от степен k

$$t = \sum t^{i_1 \ldots i_k} \ell_{i_1} \ldots \ell_{i_k}\,,$$

където $\ell_i \in S$, S е базис на E, $t^{i_1 \ldots i_k} \ell_{i_1} \ldots \ell_{i_k} \in \mathbb{F}$.

Тензорът t се нарича *симетричен (антисиметричен)*, ако $t^{i_1 \ldots i_k}$ е симетрично (антисиметрично) по всички индекси (симетрията не зависи от избора $\ell_i \in S$). Означаваме

$$S(E) \;=\; \mathop{\oplus}_{k=0}^{\infty} S_k(E), \qquad A(E) \;=\; \mathop{\oplus}_{k=0}^{\infty} A_k(E)\,, \tag{4.19}$$

където $S_k(E)$, $(A_k(E))$ е подпространството на всички симетрични (антисиметрични) тензори от степен k. Ако $dim\, E = n < \infty$,

$$dim\, S_k(E) \;=\; \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) \;=\; \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\,, \quad dim\, A_k(E) \;=\; \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Сега разглеждаме алгебра на Ли $\mathcal{G}$. *Универсална обвиваща алгебра* $U(\mathcal{G})$ над $\mathcal{G}$ се дефинира като фактор-алгебрата $U(\mathcal{G}) \cong T(\mathcal{G})/\mathcal{I}$, където $\mathcal{I}$ е идеалът, генериран от елементите $[x,y]-(xy-yx)$. Т.к. $U(\mathcal{G}) \cong S(\mathcal{G})$ като векторни пространства, базисът в $U(\mathcal{G})$ се задава с

$$\ell_0 = 1,\; \ell_{i_1 \ldots i_k} = \ell_{i_1} \ell_{i_2} \ldots \ell_{i_k},\; i_1 \leqq \ldots \leqq i_k\,.$$

4.2 Супералгебри на Ли. Системи от корени.

Суперпространство наричаме линейно пространство M над $\mathbb{F}$ с $\mathcal{Z}_2$–градуировка, т.е. определено е разложение $M = M_{\bar{0}} \oplus M_{\bar{1}}$, $M_{\bar{0}}$ и $M_{\bar{1}}$ се наричат съответно четни и нечетни. За тях се дефинира четност $p(m) = 0, 1$ съответно за $M_{\bar{0}}$, $M_{\bar{1}}$. *Подсуперпространство* е $\mathcal{Z}_2$–градуирано подпространство $N \subset M$, така че $N_{\bar{k}} \subset M_{\bar{k}}$.

Супералгебра се нарича суперпространство $\mathcal{A}$, което е алгебра и за което $X \cdot Y \in \mathcal{A}_{i+j}$, $X \in \mathcal{A}_i$, $Y \in \mathcal{A}_j$. Идеал $\mathcal{I}$ на $\mathcal{A}$ е идеалът на алгебрата $\mathcal{A}$, който е същевременно подсуперпространство на $\mathcal{A}$.

Супералгебра на Ли е супералгебрата $\mathcal{G}$, в която за всички $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ имаме:

$$[X, Y] = -(-1)^{p(X)p(Y)} [Y, X] \tag{4.20а}$$

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{p(X)p(Y)} [Y, [X, Z]] \,. \tag{4.20б}$$

Универсалната обвиваща супералгебра $U(\mathcal{G})$ на $\mathcal{G}$ е $U(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G})/\mathcal{R}$, където $T(\mathcal{G})$ е тензорната супералгебра с индуцирана $\mathcal{Z}_2$–градуировка, а $\mathcal{R}$ е идеал на $T(\mathcal{G})$, генериран от

$$[X, Y] - X \otimes Y + (-1)^{p(X)p(Y)} Y \otimes X \,.$$

Суперматрица е матрица, за която всеки ред (и колона) е определен или като четен, или като нечетен.

Простата супералгебра $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$ е *класическа* супералгебра на Ли, за която представянето на $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ върху $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ е напълно преводимо. *Основна класическа* супералгебра на Ли, се нарича класическата, за която е зададена неизродена билинейна форма.

Задали сме класическата супералгебра на Ли $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{G}_{\bar{1}}$. *Подалгебра на Картан* $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$ дефинираме да бъде картановата подалгебра на $\mathcal{G}_{\bar{0}}$. За $\mathcal{G}$ е валидно разложението както в четния случай, но тук $\Delta = \Delta_{\bar{0}} \cup \Delta_{\bar{1}}$, където $\Delta_{\bar{0}}$ е системата от корени за $\mathcal{G}_{\bar{0}}$, а $\Delta_{\bar{1}}$ е системата от тегла на представянето на $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ върху $\mathcal{G}_{\bar{1}}$. [3] Системите $\Delta_{\bar{0}}, \Delta_{\bar{1}}$ се наричат съответно четна и нечетна. Система от корени $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ се нарича *проста*, ако съществуват вектори $X_i^+ \in \mathcal{G}_{\alpha_i}$, $X_i^- \in \mathcal{G}_{-\alpha_i}$, които генерират $\mathcal{G}$, такива че $\left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{ij} H_i \in \mathcal{H}$. За разлика от четния случай, изоморфните супералгебри могат да имат различни системи от корени. Простата система от корени с минимален брой нечетни корени се нарича *отличена (distinguished)*.

4.3 Модули на Верма. Сингулярни вектори. Условия за преводимост на модулите на Верма

Следвайки (2.11), разлагаме комплексифицираната алгебра $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = sl(4/N)$:

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \;=\; \mathcal{G}^+ \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}^- \,, \tag{4.21}$$

където $\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-$ съответстват на положителните и отрицателните корени на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, а $\mathcal{H}$ е картановата подалгебра на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

Разглеждаме *модули на Верма с младши вектор (LWM)* [4] $V^\Lambda \cong U(\mathcal{G}^+) \otimes v_0$, където $U(\mathcal{G}^+)$ е универсалната обвиваща алгебра на $\mathcal{G}^+$, $\Lambda \in \mathcal{H}^*$ е младшето тегло, а v_0 е младшият вектор (наричан още вакуумен вектор (състояние) или просто вакуум):

$$\begin{aligned} X\, v_0 \;&=\; 0, \quad X \in \mathcal{G}^-, \\ H\, v_0 \;&=\; \Lambda(H) v_0, \quad H \in \mathcal{H} \,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

[3] Т.е. $\Delta_{(\bar{1})} \;\equiv\; \{\alpha,\; ad\, X\;\; Y \;\equiv\; [X,\; Y] = \alpha(X)\; Y,\;\; X \in \mathcal{G}_{\bar{0}},\;\; Y \in \mathcal{G}_{\bar{1}}\}$

[4] Модулите на Верма са една от възможните реализации на (в общия случай) безкрайномерните представяния

За простота ще изтърваме $\otimes$ и ще пишем $Pv_0 \in V^\Lambda$, където $P \in U(\mathcal{G}^+)$.

Модулът на Верма се определя еднозначно чрез теглото Λ. Ако модулът V^Λ е непреводим, той задава непреводимото представяне (irrep) с младше тегло L_Λ със същото тегло. Ако е преводим, той съдържа максимален инвариантен подмодул I_Λ и непреводимото представяне L_Λ се получава след факторизирането: $L_\Lambda = V^\Lambda / I^\Lambda$ [14].

Един LWM V^Λ е преводим, ако поне едно от условията е изпълнено [7]:

$$(\rho - \Lambda, \beta) \; = \; m\,(\beta,\beta)/2 \;, \qquad \beta \in \Delta^+ \,, \qquad (\beta,\beta) \neq 0 \,, \qquad m \in \mathbb{N} \,, \tag{4.23а}$$

$$(\rho - \Lambda, \beta) \; = \; 0 \;, \qquad \beta \in \Delta^+ \,, \qquad (\beta,\beta) = 0 \,, \tag{4.23б}$$

където $\rho \in \mathcal{H}^*$, $\rho = \rho_{\bar{0}} - \rho_{\bar{1}}$, $\rho_{\bar{0}}, \rho_{\bar{1}}$ са полусумите на четните и нечетните положителни корени, а $(\cdot,\cdot)$ е произведението в $\mathcal{H}^*$.

Ако (4.23а) е изпълнено за някое β, тогава V^Λ съдържа подмодул, който е Верма–модул $V^{\Lambda'}$ с изместено тегло, определено чрез двойката (m,β) така: $\Lambda' = \Lambda + m\beta$. Влагането на $V^{\Lambda'}$ в V^Λ се осъществява чрез отъждествяване на младшия вектор v_0' на $V^{\Lambda'}$ със *сингулярния* вектор $v_s^{m,\beta} \in V^\Lambda$, който напълно се определя от

$$\begin{aligned} X\, v_s^{m,\beta} \; &= \; 0, \quad X \in \mathcal{G}^-, \\ H\, v_s^{m,\beta} \; &= \; \Lambda'(H) v_0, \quad H \in \mathcal{H}\,, \quad \Lambda' = \Lambda + m\beta \,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Експлицитно, $v_s^{m,\beta}$ се задава чрез четен полином на генераторите, съответстващи на положителните корени:

$$v_s^{m,\beta} \; = \; P^{m,\beta}\, v_0 \,, \qquad P^{m,\beta} \in U(\mathcal{G}^+) \,. \tag{4.25}$$

По този начин подмодулът на V^Λ, който е изоморфен на $V^{\Lambda'}$, се задава чрез $U(\mathcal{G}^+) P^{m,\beta}\, v_0$.

Ако (4.23б) е изпълнено за някое β, тогава V^Λ съдържа подмодул I^β, получен от Верма подмодула $V^{\Lambda'}$ с изместено тегло $\Lambda' = \Lambda + \beta$. Тогава V^Λ съдържа сингулярен вектор

$$\begin{aligned} X\, v_s^{\beta} \; &= \; 0, \quad X \in \mathcal{G}^-, \\ H\, v_s^{\beta} \; &= \; \Lambda'(H) v_0, \quad H \in \mathcal{H}\,, \quad \Lambda' = \Lambda + \beta \,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Експлицитно, v_s^β се задава чрез нечетен полином на генераторите, съответстващи на положителните корени:

$$v_s^{\beta} \; = \; P^{\beta}\, v_0 \,, \qquad P^{\beta} \in U(\mathcal{G}^+) \,. \tag{4.27}$$

Тогава

$$I^\beta \; = \; U(\mathcal{G}^+) P^\beta\, v_0 \,, \qquad (P^\beta)^2 \; = \; 0 \,,$$

т.к. квадратът на нечетните генератори е нула и затова полиномите от горния тип се ограничават до първа степен. В такъв случай казваме, че $V^{\Lambda'}$ е *нечетно вложен* в V^Λ.

Ако β е нечетен корен, преместването на теглото $\Lambda' = \Lambda + \beta$ наричаме *нечетно отражение* и по-нататък ще го означаваме така:

$$\hat{s}_\beta \cdot \Lambda \;\equiv\; \Lambda + \beta\,, \qquad (\beta,\beta) = 0\,, \qquad (\Lambda,\beta) \neq 0\,. \tag{4.28}$$

Всяко нечетно отражение генерира безкрайна дискретна абелева група $\tilde{W}_\beta$, наречена група на Вайл.

$$\tilde{W}_\beta \;\equiv\; \{(\hat{s}_\beta)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}\;, \qquad \ell((\hat{s}_\beta)^n) \;=\; n\,. \tag{4.29}$$

Дефинирали сме функцията $\ell(\cdot)$ върху елементите w на $\tilde{W}_\beta$, която задава броя на простите нечетни отражения, които генерират w; $\ell(w)$ се нарича дължина на w. Вайловата група $\tilde{W}_\beta$ действа върху теглата Λ така:

$$(\hat{s}_\beta)^n \cdot \Lambda \;=\; \Lambda + n\beta\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \qquad (\beta,\beta) = 0\,, \qquad (\Lambda,\beta) \neq 0\,. \tag{4.30}$$

Това има отношение към факта, че се наблюдава безкрайна верига от нечетно вложени Верма–модули, в случаите когато Верма–модулът е преводим спрямо кой да е нечетен корен (виж следващата глава).

4.4 Характери

В началово на тази секция ще следваме [15]. Нека $\widehat{\mathcal{G}}$ е проста алгебра на Ли от ранг ℓ, $\widehat{\mathcal{H}}$ е картановата ѝ подалгебра, а $\widehat{\Delta}$ и $\widehat{\pi}$ са съответно системата от корени и множеството на простите корени. С Γ (или Γ_+) бележим множеството от интегралните (или доминантните интегрални) елементи на $\widehat{\mathcal{H}}^*$, т.е. $\lambda \in \widehat{\mathcal{H}}^*$, такива че $(\lambda, a_i^\vee) \in \mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Z}_+$) за всички прости корени α_i, ($\alpha_i^\vee \equiv 2\alpha_i/(\alpha_i,\alpha_i)$). Нека V е модул с младше тегло Λ и младши вектор v_0. За V е валидно следното разложение:

$$V \;=\; \bigoplus_{\mu\in\Gamma_+} V_\mu \;\;, \qquad V_\mu \;=\; \{u \in V \mid Hu = (\lambda+\mu)(H)u,\; \forall\, H \in \mathcal{H}\} \tag{4.31}$$

Нека $E(\mathcal{H})^*$ е асоциативната абелева алгебра, състояща се от формалните редове $\sum_{\mu\in\mathcal{H}^*} c_\mu e(\mu)$, където $c_\mu \in \mathbb{C}$, $c_\mu = 0$ за тези μ, които са извън обединението на краен брой множества от вида $D(\lambda) = \{\mu \in \mathcal{H}^* \mid \mu \geqq \lambda\}$, имайки предвид някаква наредба на елементите от $\mathcal{H}^*$ (лексикографическа, например). Формалните експоненти имат свойството: $e(0) = 1\,, e(\mu)e(\nu) = e(\mu+\nu)$. За модула V дефинираме *характер* за произволно $\mu \in \mathcal{H}^*$ при условие, че е изпълнено $dim\, V_\mu < \infty$ по следния начин:

$$ch\, V \;=\; \sum_{\mu\in\Gamma_+} (dim\, V_\mu)\; e(\Lambda+\mu) \;=\; e(\Lambda) \sum_{\mu\in\Gamma_+} (dim\, V_\mu)\; e(\mu) \tag{4.32}$$

Ако V е $\mathcal{G}$-модул, а V' е негов $\mathcal{G}$-подмодул, тогава

$$ch\, V \;=\; ch\, V' + ch\,(V/V')\,.$$

Ако V е модул на Верма, т.е. $V = V^\Lambda$, тогава $dim\, V_\mu = P(\mu)$, където $P(\mu)$ задава броя множества от вида $(n_{\alpha_i})_{\alpha_i\in\Delta^+}$, такива че $\mu = \sum_{\alpha_i\in\Delta^+} n_{\alpha_i}\alpha_i$, като се отчита кратността $dim\, \mathcal{G}_\beta$ на всеки корен α_i. Следователно формулата придобива вида:

$$ch\, V^\Lambda \;=\; e(\Lambda) \sum_{\mu\in\Gamma_+} P(\mu) e(\mu) \;=\; e(\Lambda) \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - e(\alpha))^{-1}\,. \tag{4.33}$$

Нека L_Λ е крайномерен непреводим LWM за $\mathcal{G}^+$. Формулата за характера можем да запишем така $(\Lambda \in -\Gamma_+)$:

$$ch\, L_\Lambda \;=\; \sum_{\omega \in W} (-1)^{l(\omega)} ch\, V^{\omega \cdot \Lambda}\,, \qquad \Lambda \in -\Gamma_+\,, \tag{4.34}$$

където операцията, означена с точка, се дефинира така: $\omega \cdot \lambda = \omega(\lambda - \rho) + \rho$.

В случай на основните класически супералгебри на Ли, формулата за характера на Верма–модула V^Λ е [14]:

$$ch\, V^\Lambda = e(\Lambda) \left(\prod_{\alpha \in \Delta_0^+} (1 - e(\alpha))^{-1} \right) \left(\prod_{\alpha \in \Delta_1^+} (1 + e(\alpha)) \right) . \tag{4.35}$$

Първият фактор $\prod_{\alpha \in \Delta_{\bar{0}}^+} (1 - e(\alpha))^{-1}$ съответства на състоянията на четния сектор: $V_0^\Lambda \equiv U((\mathcal{G}_+^{\mathcal{C}})_{(\bar{0})})\, v_0\,,$ докато $\prod_{\alpha \in \Delta_{\bar{1}}^+} (1 + e(\alpha))$ отговаря на тези от нечетния сектор: $\hat{V}^\Lambda \equiv \left(U(\mathcal{G}_+^{\mathcal{C}}) / U((\mathcal{G}_+^{\mathcal{C}})_{(\bar{0})}) \right) v_0\,.$ Така ние можем да представим характера на $\hat{V}^\Lambda$ по следния начин:

$$ch\; \hat{V}^\Lambda \;\equiv\; \prod_{\alpha \in \Delta_{\bar{1}}^+} (1 + e(\alpha)). \tag{4.36}$$

По-нататък ще се спрем конкретно на суперконформната алгебра $\mathcal{G} = su(2,2/N)$. В този случай на $\hat{V}^\Lambda$ можем да гледаме като на съвкупност от състояния, получени в резултат от всички възможни действия на $4N$-те нечетни генератори $X^+_{a,4+k}$ $(a = 1, \ldots, 4, k = 1, \ldots, N)$ върху $|\Lambda\rangle$ - младши вектор с тегло Λ. Като следствие $\hat{V}^\Lambda$ има 2^{4N} на брой състояния, а базисът му се състои от елементите [4]:

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\varepsilon}} = & \left(\prod_{k=N}^{1} (X^+_{1,4+k})^{\varepsilon_{1,4+k}} \right) \left(\prod_{k=N}^{1} (X^+_{2,4+k})^{\varepsilon_{2,4+k}} \right) \times \\ & \times \left(\prod_{k=1}^{N} (X^+_{3,4+k})^{\varepsilon_{3,4+k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{N} (X^+_{4,4+k})^{\varepsilon_{4,4+k}} \right) |\Lambda\rangle\ , \quad \varepsilon_{aj} = 0, 1\,, \end{aligned} \tag{4.37}$$

където $\bar{\varepsilon}$ означава множеството от всички ε_{ij}. Въвеждаме следното означение:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{i,4+k}\,, \qquad i = 1, 2, 3, 4\,, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4\,. \tag{4.38}$$

5 Конформната супералгебра. Представяния на конформната супералгебра за D=4

5.1 Структура на алгебрата и сигнатура на представянето

Супералгебрата $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \equiv sl(4/N;\mathbb{C})$ се реализира чрез матрици $(4+N)\times(4+N)$:

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \ni Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{(\bar{0})}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{(\bar{1})},$$

където a,b,c,d са съответно $4\times 4, 4\times N, N\times 4, N\times N$ матрици, а $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{(\bar{0})}$ и $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{(\bar{1})}$ са съответно четната и нечетната част на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ и

$$str\, Y \;\equiv\; tr\, a - tr\, d \;=\; 0\,.$$

Супералгебрата $su(2,2/N)$ е следната $(N^2+8N+15)$–мерна реална форма на $sl(4/N;\mathbb{C})$ [19]:

$$\mathcal{G} \;\equiv\; su(2,2/N) \;\equiv\; \left\{ Y \in sl(4/N;\mathbb{C}) \mid Y^{+}_{(\bar{a})} w + (-i)^a w Y_{(\bar{a})} \;=\; 0,\; Y_{(\bar{a})} \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{(\bar{a})},\; a=0,1 \right\};$$

$$w \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 & 0 \\ \mathbb{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_N \end{pmatrix},$$

където Y^{+} е ермитово спрегната на Y. Следвайки дефиницията виждаме, че четната подалгебра на $\mathcal{G}$ е алгебрата $\mathcal{G}_{(\bar{0})} = su(2,2) \oplus u(1) \oplus su(N)$.

Да разгледаме системата от корени на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ [17]. Множеството от положителните корени Δ^{+} съдържа всички $\alpha_{ij}, 1 \leqq i < j \leqq 4+N$. Множеството от четните корени $\Delta^{+}_{(\bar{0})}$ съдържа $\alpha_{ij}, i,j \leqq 4$ и $i,j \geqq 5$; нечетните корени $\Delta^{+}_{(\bar{1})}$ са $\alpha_{ij}, i \leqq 4, j \geqq 5$. Простите корени са избрани както и в [7]:

$$\gamma_1 = \alpha_{12}, \gamma_2 = \alpha_{34}, \gamma_3 = \alpha_{25}, \gamma_4 = \alpha_{4,4+N}, \gamma_k = \alpha_{k,k+1},\;\; 5 \leqq k \leqq 3+N. \tag{5.39}$$

Диаграмата на Динкин изглежда по следния начин:

$$\underset{1}{\bigcirc} - \underset{3}{\bigotimes} - \underset{5}{\bigcirc} - \cdots - \underset{3+N}{\bigcirc} - \underset{4}{\bigotimes} - \underset{2}{\bigcirc} \tag{5.40}$$

Въвеждаме т.нар. *максимална параболична подалгебра* [19]:

$$\mathcal{P} \;=\; \mathcal{M} \,\oplus\, \mathcal{A} \,\oplus\, \mathcal{N}\,, \tag{5.41}$$

където $\mathcal{A}$ е едномерната подалгебра на дилатациите, $\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}$ е център за $\mathcal{A}$ в $\mathcal{G}$, а $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 = sl(2,\mathbb{C}) \oplus u(1) \oplus su(N)$, $\mathcal{N}$ е подалгебрата, съставена от елементите, съответстващи на отрицателни корени по отношение на $\mathcal{A}$, $dim\mathcal{N} = 4N+4$; $\mathcal{N}$ генерира суперконформните трансформации. Разложението на $\mathcal{G}$ е:

$$\mathcal{G} \;=\; \tilde{\mathcal{N}} \,\oplus\, \mathcal{N} \,\oplus\, \mathcal{A} \,\oplus\, \mathcal{M}\,, \tag{5.42}$$

където $\tilde{\mathcal{N}}$ е подалгебрата, генерираща супертранслации, изоморфна е на $\mathcal{N}$ и се състои от елементи с положителни корени по отношение на $\mathcal{A}$.

Разглеждаме клас от $\mathcal{P}$–индуцирани безкрайномерни представяния на конформната супералгебра на Ли $\mathcal{G}$, т.е. индуцирани от крайномерните непреводими представяния D_χ на $\mathcal{MA}$ ($\mathcal{N}$ действа тривиално), които означаваме със сигнатура[5]:

$$\chi \;=\; [\, d\,;\, j_1\,,\, j_2\,;\, z\,;\, r_1\,, \ldots, r_{N-1}\,]\,, \tag{5.43}$$

където d е конформното тегло, задаващо представянето на $\mathcal{A}$, j_1, j_2 са неотрицателни (полу-)цели числа, които са индексите на Динкин за крайномерните непреводими представяния на лоренцовата подалгебра $so(3,1)$ $(D = 4)$ (или нейната накриваща $sl(2,\mathbb{C})$) с размерност $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$, z индексира подалгебрата $u(1)$, която е център на $\mathcal{G}_{(\bar{0})}$ (за $N = 4$ е център и на $\mathcal{G}$), а $r_1, \ldots, r_{N-1}$ са неотрицателни цели числа - индекси на Динкин за крайномерните представяния на $su(N)$.

Връзката между сигнатурата χ и младшите тегла $\Lambda(\chi)$ се задава чрез произведенията на Λ с простите корени [7]: [6]

$$(\Lambda, \gamma_\alpha) = -2j_\alpha \tag{5.44а}$$

$$(\Lambda, \gamma_3) = \frac{1}{2}(d + z') + j_1 - m/N + 1 \tag{5.44б}$$

$$(\Lambda, \gamma_4) = \frac{1}{2}(d - z') + j_2 - m_1 + m/N + 1\,, \quad z' \equiv z(1 - \delta_{N4}) \tag{5.44в}$$

$$(\Lambda, \gamma_j) = r_{N+4-j}\,, \quad 5 \leqq j \leqq 3 + N\,. \tag{5.44г}$$

5.2 Сингулярни вектори и инвариантни подмодули. Условия за преводимост

Разглеждаме модули LWM V^Λ над $\mathcal{G}^\mathbb{C}$, където младшето тегло Λ се определя от стойностите си върху картановата подалгебра $\mathcal{H}$, като връзката $\Lambda \leftrightarrow \chi$ е еднозначно определена. Както беше отбелязано в глава 3, ако модулът на Верма V^Λ е непреводим, той задава непреводимото представяне с младше тегло L_Λ със същото тегло. Ако V^Λ е преводим, тогава той съдържа максимален инвариантен подмодул I^Λ, а непреводимото представяне L_Λ със същото тегло получаваме чрез факторизиране по I^Λ, т.е. $L_\Lambda = V^\Lambda / I^\Lambda$. Условията, при които модулът V^Λ е преводим, са получени от Кац [14].

Първо да се спрем на условията на преводимост спрямо четните корени. Имаме 6 четни корена $\alpha_{ij} \in \Delta^+_{\bar{0}}, j \leq 4$, отговарящи на фактора $sl(4)$ (който е получен след комплексификацията на $su(2,2)$) и $N(N-1)/2$ корена α_{ij} , $5 \leq i$, идващи от фактора $sl(N)$ (комплексификацията на $su(N)$).

Условията за преводимост по отношение на положителните корени, съответстващи на $sl(4)$ $(su(2,2))$, получени от (4.23) (означаваме $m \to n_{ij}$ за $\beta \to \alpha_{ij}$), са:

---

[5] Поредица от числа (индекси), задаващи представянето

[6] За $N = 4$ факторът $u(1)$ в $\mathcal{G}_{(\bar{0})}$ става център в $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^\mathbb{C}$. Следователно, индексът в сигнатурата z не може да се получи от произведенията на Λ с простите корени, както е показано в (5.44). В този случай най-ниското тегло се дава от сумата $\Lambda + \tilde{\Lambda}$, където $\tilde{\Lambda}$ носи параметърът z. Това е детайлно обяснено в [7] и повече няма да се спираме на него, но особеностите за $N = 4$ ще се виждат явно във формулите.

$$\begin{aligned}
n_{12} &= 1+2j_1 \ \equiv n_1 && (5.45\text{а})\\
n_{23} &= 1-d-j_1-j_2 \ \equiv n_2 && (5.45\text{б})\\
n_{34} &= 1+2j_2 \ \equiv n_3 && (5.45\text{в})\\
n_{13} &= 2-d+j_1-j_2 \ = \ n_1+n_2 && (5.45\text{г})\\
n_{24} &= 2-d-j_1+j_2 \ = \ n_2+n_3 && (5.45\text{д})\\
n_{14} &= 3-d+j_1+j_2 \ = \ n_1+n_2+n_3 && (5.45\text{е})
\end{aligned}$$

Очевидно условията (5.45а),(5.45в) автоматично се удовлетворяват за $\Lambda(\chi)$, където χ е разглежданата от нас сигнатура (5.43), т.к. винаги $n_1, n_3 \in I\!N$.

От (4.23) се получава, че за положителните корени, отговарящи на $sl(N)$ $(su(N))$, условията за преводимост за $\Lambda(\chi)$ са винаги изпълнени, където χ е разглежданата от нас сигнатура (5.43).

Следователно, за V^Λ при $\Lambda = \Lambda(\chi)$ винаги има инвариантен подмодул I_c^Λ, генериран от сингулярните вектори:

$$\begin{aligned}
&v_s^1 = (X_1^+)^{1+2j_1} v_0 && (5.46\text{а})\\
&v_s^2 = (X_2^+)^{1+2j_2} v_0 && (5.46\text{б})\\
&v_s^3 = (X_j^+)^{1+r_{N+4-j}} v_0\,, \quad j = 5,\ldots,N+3\,, && (5.46\text{в})
\end{aligned}$$

които са породени от простите четни корени $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \ldots, \gamma_{N+3}$ [7]. Поради тази причина разглеждаме модула:

$$\tilde{V}^\Lambda = V^\Lambda / I_c^\Lambda\,, \tag{5.47}$$

където

$$I_c^\Lambda = \bigcup_k I_k^\Lambda\,, \quad I_k^\Lambda = U(\mathcal{G}^+) v_s^k\,, \tag{5.48}$$

където $U(\mathcal{G}^+)$ е универсалната обвиваща алгебра, построена върху вектори само от $\mathcal{G}^+$. Следователно, за редуцирания $\tilde{V}^\Lambda$ е изпълнено:

$$\begin{aligned}
(X_1^+)^{1+2j_1} \left|\tilde{\Lambda}\right\rangle &= 0 && (5.49\text{а})\\
(X_2^+)^{1+2j_2} \left|\tilde{\Lambda}\right\rangle &= 0 && (5.49\text{б})\\
(X_j^+)^{1+r_{N+4-j}} \left|\tilde{\Lambda}\right\rangle &= 0\,, \quad j = 5,\ldots,N+3\,. && (5.49\text{в})
\end{aligned}$$

Условията за преводимост на V^Λ за всички $4N$ нечетни положителни корени на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ са следните $(k = 1,\ldots,N)$ [7],[8]:

$$\begin{aligned}
&d = d_{Nk}^1 - z\delta_{N4}\,, && d_{Nk}^1 \equiv 4-2k+2j_2+z+2m_k-2m/N\,, && (5.50\text{а})\\
&d = d_{Nk}^2 - z\delta_{N4}\,, && d_{Nk}^2 \equiv 2-2k-2j_2+z+2m_k-2m/N\,, && (5.50\text{б})\\
&d = d_{Nk}^3 + z\delta_{N4}\,, && d_{Nk}^3 \equiv 2+2k-2N+2j_1-z-2m_k+2m/N\,, && (5.50\text{в})\\
&d = d_{Nk}^4 + z\delta_{N4}\,, && d_{Nk}^4 \equiv 2k-2N-2j_1-z-2m_k+2m/N\,, && (5.50\text{г})
\end{aligned}$$

където $m_k \equiv \sum_{i=k}^{N-1} r_i$, $k < N$, $m_N \equiv 0$, $m \equiv \sum_{k=1}^{N-1} m_k = \sum_{k=1}^{N-1} kr_k$ (m_k е броят клетки на k-тия ред в диаграмата на Юнг за $SU(N)$).

Пълният набор от унитарни непреводими представяния (UIRs) с младше тегло (т.е. с положителна енергия) на $su(2,2/N)$ е [8]:

$$
\begin{aligned}
d &\geqq d_{max} = max(d^1_{N1}, d^3_{NN}) && (5.51а)\\
d &= d^4_{NN} \geqq d^1_{N1}\,, \quad j_1 = 0\,, && (5.51б)\\
d &= d^2_{N1} \geqq d^3_{NN}\,, \quad j_2 = 0\,, && (5.51в)\\
d &= d^2_{N1} = d^4_{NN}\,, \quad j_1 = j_2 = 0\,, && (5.51г)
\end{aligned}
$$

където d_{max} е границата на непрекъснатия унитарен спектър. Непреводимите модули се наричат по следния начин в зависимост от стойността на d. Когато $d > d_{max}$, модулите на Верма $\tilde{V}^\Lambda$ са вече непреводими и съвпадат с L_Λ. Т.к. броят на състоянията в L_Λ е максимален, те се наричат *дълги(long)*. В случая $d = d_{max}$, (5.51а), те се наричат *полу-къси(semi-short)*, а случаите (5.51б),(5.51в),(5.51г) - *къси(short)*, т.к. се извършва факторизиране и броят на състоянията в L_Λ се редуцира.

Нека разгледаме по-детайлно четирите случая на преводимост, в които се реализират унитарни непреводими представяния с младше тегло, отговарящи на случаите (5.51):

$$
\begin{aligned}
d^1_{N1} &= 2 + 2j_2 + z + 2m_1 - 2m/N\,,\\
d^2_{N1} &= z + 2m_1 - 2m/N\,, \quad (j_2 = 0)\\
d^3_{NN} &= 2 + 2j_1 - z + 2m/N\,,\\
d^4_{NN} &= -z + 2m/N\,, \quad (j_1 = 0)\,.
\end{aligned}
\qquad (5.52)
$$

Горните случаи на преводимост на $\tilde{V}^\Lambda$, съответстващи на $d^1_{N1}, d^2_{N1}, d^3_{NN}, d^4_{NN}$, отговарят на следните нечетни корени:

$$
\alpha_{3,4+N} = \gamma_2 + \gamma_4\,, \quad \alpha_{4,4+N} = \gamma_4\,, \quad \alpha_{15} = \gamma_1 + \gamma_3\,, \quad \alpha_{25} = \gamma_3\,. \qquad (5.53)
$$

Съответните сингулярни вектори са:

$$
\begin{aligned}
v^1_{odd} &= P_{3,4+N} v_0 = \left(2j_2 X^+_{3,4+N} - X^+_4 X^+_2\right) v_0\,, && d = d^1_{N1}\,, && (5.54а)\\
v^2_{odd} &= X^+_4 v_0\,, && d = d^2_{N1}\,, && (5.54б)\\
v^3_{odd} &= P_{15} v_0 = \left(2j_1 X^+_{15} - X^+_3 X^+_1\right) v_0\,, && d = d^3_{NN}\,, && (5.54в)\\
v^4_{odd} &= X^3_+ v_0\,, && d = d^4_{NN}\,, && (5.54г)
\end{aligned}
$$

Очевидно са изпълнени следните неравенства:

$$
d^1_{N1} > d^2_{N1}\,, \qquad d^3_{NN} > d^4_{NN}\,, \qquad (5.55)
$$

поради което най-много две от условията (5.52) могат да бъдат удовлетворени едновременно:

$$
d^1_{N1} = d^3_{NN}\,, \quad d^1_{N1} = d^4_{NN}\,, \quad d^2_{N1} = d^3_{NN}\,, \quad d^2_{N1} = d^4_{NN}\,.
$$

5.3 Структура на преводимите модули на Верма, съдържащи унитарни представяния

Първо ще разгледаме случаите, когато се удовлетворява само едно от условията (5.52), т.е. нямаме съвпадение. Възможните ситуации са четири [8]:

$$\mathbf{a:}\ d \ = \ d_{max} = d^1_{N1} = d^a \ \equiv \ 2 + 2j_2 + z + 2m_1 - 2m/N > d^3_{NN}\,, \tag{5.56а}$$

$$\mathbf{b:}\ d \ = \ d^2_{N1} > d^3_{NN}\,, \quad j_2 = 0\,, \tag{5.56б}$$

$$\mathbf{c:}\ d \ = \ d_{max} = d^3_{NN} = d^c \equiv 2 + 2j_1 - z + 2m/N > d^1_{N1}\,, \tag{5.56в}$$

$$\mathbf{d:}\ d \ = \ d^4_{NN} > d^1_{N1}\,, \quad j_2 = 0\,. \tag{5.56г}$$

Модулите на Верма, които отговарят на случаите a, b, c, d се наричат еднократно преводими модули на Верма (*single-reducibility-condition (SRC)* Verma Modules/UIRs). Съответният модул на Верма $\tilde{V}^\Lambda$ има само един инвариантен нечетен подмодул, по който се факторизира, и като резултат получаваме търсеното унитарно непреводимо представяне. Нечетното влагане се изобразява по следния начин:

$$\tilde{V}^\Lambda \ \longrightarrow \ \tilde{V}^{\Lambda+\beta}\,, \quad L_\Lambda = \tilde{V}^\Lambda / I^\beta\,, \tag{5.57}$$

като стрелките сочат към нечетно вложения модул. По-надолу ще разглеждаме случаите, съответстващи на (5.52), за които

$$\beta \ = \ \alpha_{3,4+N}\,, \qquad \text{за (5.56а)}\,, \quad j_2 > 0\,, \tag{5.58а}$$

$$= \ \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}\,, \qquad \text{за (5.56а)}\,, \quad j_2 = 0\,, \tag{5.58б}$$

$$= \ \alpha_{15}\,, \qquad \text{за (5.56в)}\,, \quad j_1 > 0\,, \tag{5.58в}$$

$$= \ \alpha_{15} + \alpha_{25}\,, \qquad \text{за (5.56в)}\,, \quad j_1 = 0\,. \tag{5.58г}$$

Диаграмата (5.57), изобразяваща влагане на модула $\tilde{V}^{\Lambda+\beta}$ в $\tilde{V}^\Lambda$, е всъщност част от безкрайна верига от влагания [3], защото, ако условието за преводимост е изпълнено за някое нечетно β, то е изпълнено и за $\mathbb{Z}\beta$. Ако означим $V_l = V^{\Lambda+l\beta}$, можем да изобразим безкрайната верига от нечетно вложени един в друг модули:

$$\cdots \ \longrightarrow \ V_{-1} \ \longrightarrow \ V_0 \ \longrightarrow \ V_1 \ \longrightarrow \ \cdots \tag{5.59}$$

Да разгледаме четирите случая, в които имаме едновременно изпълнение на две от условията (5.56), [8]:

$$\mathbf{ac:}\ d \ = \ d_{max} = d^{ac} \ \equiv \ 2 + j_1 + j_2 + m_1 = d^1_{N1} = d^3_{NN}\,, \tag{5.60а}$$

$$\mathbf{ad:}\ d \ = \ d^1_{N1} = d^4_{NN} \ = \ 1 + j_2 + m_1\,, \quad j_1 = 0\,, \tag{5.60б}$$

$$\mathbf{bc:}\ d \ = \ d^2_{N1} = d^3_{3N} \ = \ 1 + j_1 + m_1\,, \quad j_2 = 0\,, \tag{5.60в}$$

$$\mathbf{bd:}\ d \ = \ d^2_{N1} = d^4_{NN} \ = \ m_1\,, \quad j_1 = j_2 = 0\,. \tag{5.60г}$$

Тези модули се наричат двойно-преводими модули на Верма (*double-reducibility-condition (DRC)* Verma modules/UIRs). Модулът от (5.56а) е полукъсо UIR, докато другите са къси. Диаграмите на нечетните влагания са следните:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}^{\Lambda+\beta'} & & \\ \uparrow & & \\ \tilde{V}^{\Lambda} & \longrightarrow & \tilde{V}^{\Lambda+\beta} \end{array} , \quad L_\Lambda = \tilde{V}^\Lambda / I^{\beta,\beta'} , \quad I^{\beta,\beta'} = I^\beta \cup I^{\beta'} . \tag{5.61}$$

Следва списък с двойките β, β', които ще бъдат използвани по-надолу:

$$\begin{aligned}
(\beta,\beta') &= (\alpha_{15}, \alpha_{3,4+N}) , && \text{за (5.60а)} , \quad j_1 j_2 > 0 , && (5.62\text{а}) \\
&= (\alpha_{15}, \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}) , && \text{за (5.60б)} , \quad j_1 > 0, j_2 = 0 , && (5.62\text{б}) \\
&= (\alpha_{15} + \alpha_{25}, \alpha_{3,4+N}) , && \text{за (5.60в)} , \quad j_1 = 0, j_2 > 0 , && (5.62\text{в}) \\
&= (\alpha_{15} + \alpha_{25}, \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}) , && \text{за (5.60г)} , \quad j_1 = j_2 = 0 . && (5.62\text{г})
\end{aligned}$$

Диаграмите на влагане за $\tilde{V}^\Lambda$, когато има четни влагания са:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{V}^{\Lambda+\beta'} & & \\ & & \uparrow & & \\ \tilde{V}^{\Lambda+\beta_e} & \longleftarrow & \tilde{V}^{\Lambda} & \longrightarrow & \tilde{V}^{\Lambda+\beta} \end{array} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
(\beta,\beta',\beta_e) &= \\
&= (\alpha_{15}, \alpha_{3,4+N}, \alpha_{14}), \quad \text{за (5.51а)}, \quad j_1 j_2 > 0, \quad m_1 = 0 && (5.64\text{а}) \\
&= (\alpha_{25}, \alpha_{3,4+N}, \alpha_{24}), \quad \text{за (5.51б)}, \quad j_2 = \tfrac{1}{2} , \ m_1 = 0 && (5.64\text{б}) \\
&= (\alpha_{25}, \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}, \alpha_{23} + \alpha_{14}), \quad \text{за (5.51б)}, \quad j_2 = m_1 = 0 && (5.64\text{в}) \\
&= (\alpha_{15}, \alpha_{4,4+N}, \alpha_{13}), \quad \text{за (5.51в)}, \quad j_2 = \tfrac{1}{2} , \ m_1 = 0 && (5.64\text{г}) \\
&= (\alpha_{15} + \alpha_{25}, \alpha_{4,4+N}, \alpha_{23} + \alpha_{14}), \quad \text{за (5.51в)}, \quad j_1 = m_1 = 0 && (5.64\text{д}) \\
&= (\alpha_{25}, \alpha_{4,4+N}, \alpha_{23} + \alpha_{14}), \quad \text{за (5.51г)}, \quad m_1 = 1 && (5.64\text{е})
\end{aligned}$$

За да получим L_Λ, извършваме отново факторизиране на $\tilde{V}^\Lambda$

$$L_\Lambda = \tilde{V}^\Lambda / I^{\beta,\beta',\beta_e} , \quad I^{\beta,\beta'} = I^\beta \cup I^{\beta'} \cup \tilde{V}^{\Lambda+\beta_e} \tag{5.65}$$

Двете нечетни влагания в (5.61) са комбинация от различни случаи на (5.57) и т.к. последната е част от по-голяма схема, в този случай се наблюдава същото, т.к., ако имаме преводимост на V^Λ за β, β', тогава преводим е и $V_{kl} \equiv V^{\Lambda+k\beta+l\beta'}$.

6 Характери на унитарни непреводими представяния с положителна енергия

6.1 Предварителни сведения

За удобство разлагаме младшето тегло Λ на отделни съставящи, отговарящи на теглата на трите фактора, индуциращи представянето (виж текста над (5.44)):

$$\Lambda \;=\; \sum_{j=1}^{N+3} \lambda_j \alpha_{j,j+1} \;=\; \Lambda^s + \Lambda^z + \Lambda^u \tag{6.66а}$$

$$\Lambda^s \;\equiv\; \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \alpha_{j,j+1}\,, \quad \Lambda^z \;\equiv\; \lambda_4 \alpha_{45}\,, \quad \Lambda^u \;\equiv\; \sum_{j=5}^{N+3} \lambda_j \alpha_{j,j+1}\,, \tag{6.66б}$$

като сме избрали отличената система от корени, съдържаща един нечетен корен α_{45}.

Можем да напишем характера на $\hat{V}^\Lambda$ така:

$$ch\ \hat{V}^\Lambda \;=\; \sum_{\bar{\varepsilon}} e(\Psi_{\bar{\varepsilon}}) \;= \tag{6.67а}$$

$$= \sum_{\bar{\varepsilon}} \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{1,4+k})^{\varepsilon_{1,4+k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{2,4+k})^{\varepsilon_{2,4+k}} \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{3,4+k})^{\varepsilon_{3,4+k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{4,4+k})^{\varepsilon_{4,4+k}} \right) \;= \tag{6.67б}$$

$$= \sum_{\bar{\varepsilon}} e \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{a=1}^{4} \varepsilon_{a,4+k}\, \alpha_{a,4+k} \right) \tag{6.67в}$$

$$\tag{6.67г}$$

(Да се обърне внимание, че горната формула не зависи от Λ.)

Тогава характера на V^Λ записваме така:

$$\begin{aligned} ch\ V^\Lambda \;&= ch\ \hat{V}^\Lambda \ \cdot\ ch_0\ V_0^\Lambda \;= \\ &= \sum_{\bar{\varepsilon}} e \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{a=1}^{4} \varepsilon_{a,4+k}\, \alpha_{a,4+k} \right) \ \cdot\ e(\Lambda) \left(\prod_{\alpha \in \Delta_{\bar{0}}^+} (1 - e(\alpha))^{-1} \right) \;= \\ &= \sum_{\bar{\varepsilon}} e \left(\Lambda \;+\; \sum_{k=1}^{N} \sum_{a=1}^{4} \varepsilon_{a,4+k}\, \alpha_{a,4+k} \right) \left(\prod_{\alpha \in \Delta_{\bar{0}}^+} (1 - e(\alpha))^{-1} \right) \;= \\ &= \sum_{\bar{\varepsilon}} ch_0\ V_0^{\Lambda \,+\, \sum_{k=1}^{N} \sum_{a=1}^{4}\ \varepsilon_{a,4+k}\, \alpha_{a,4+k}}\,, \end{aligned} \tag{6.68}$$

където $ch_0\ V_0^\Lambda$ е характерът, получен при рестрикция на V^Λ върху V_0^Λ:

$$ch_0\ V_0^\Lambda \ = \ e(\Lambda^z) \ \cdot \ ch_0\ V^{\Lambda^s} \ \cdot \ ch_0\ V^{\Lambda^u} . \tag{6.69}$$

Разложили сме $\Lambda = \Lambda^s + \Lambda^z + \Lambda^u$, и V^{Λ^s}, V^{Λ^u}, съответно, са Верма–модулите над комплексификациите над $su(2,2)$, $su(N)$, съответно (виж Приложение).

Аналогично, за факторизираните Верма–модули $\tilde{V}^\Lambda$ формулата за характера е:

$$\begin{aligned} ch\ \tilde{V}^\Lambda \ &= ch\ \hat{V}^\Lambda \ \cdot \ ch_0\ \tilde{V}_0^\Lambda \ = \\ &= \sum_{\bar{\varepsilon}} \ ch_0\ \tilde{V}_0^{\Lambda\ +\ \sum_{k=1}^N \sum_{a=1}^4 \ \varepsilon_{a,4+k}\, \alpha_{a,4+k}} , \end{aligned} \tag{6.70}$$

където $ch_0\ \tilde{V}_0^\Lambda$ е характерът, получен при рестрикцията на $\tilde{V}^\Lambda$ върху $\tilde{V}_0^\Lambda \ \equiv \ U((\mathcal{G}_+^{\mathbb{C}})_{(\bar{0})}) \left|\tilde{\Lambda}\right\rangle$, или по-експлицитно:

$$ch_0\ \tilde{V}_0^\Lambda \ = \ e(\Lambda^z) \ \cdot \ ch_0\ L_{\Lambda^s} \ \cdot \ ch_0\ L_{\Lambda^u} \tag{6.71}$$

където сме използвали разложението $\Lambda = \Lambda^s + \Lambda^z + \Lambda^u$ и формулите за характерите (П.2),(П.4) на непреводимите представяния на четната подалгебра (виж Приложението).

Формула (6.70) задава развитието в ред на съответното суперполе [7] по компоненти като всяка компонента има свой четен характер. Виждаме, че това развитие се получава чрез разлагането на нечетния характер (6.67).

6.2 Случай на дълги представяния

Както вече стана ясно, ако $d > d_{max}$, то представянията не притежават други преводимости, с изключение на тривиалните четни (5.46), и тогава $L_\Lambda = \tilde{V}^\Lambda$ са наречени дълги. Тогава е възможно $\hat{L}_\Lambda$ да включват всичките 2^{4N} на брой възможни състояния (включително и вакуумното състояние). Обаче общият брой състояния може да е по-малък от 2^{4N}, т.к. съществуват състояния с определени стойности на j_α и r_k, върху които е невъзможно действието на всички нечетни оператори, т.е. такива, върху които при действие операторите връщат нула. Не е трудно да се покаже, че сигнатурата на състоянието $\Psi_{\bar{\varepsilon}}$ е:

$$\begin{aligned} \chi\,(\Psi_{\bar{\varepsilon}}) \ = \ [\, & d + \tfrac{1}{2}\varepsilon\, ;\, j_1 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1),\, j_2 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_4 - \varepsilon_3)\, ;\, z + \epsilon_N(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, ; \\ & \ldots, r_i + \varepsilon_{1,N+4-i} - \varepsilon_{1,N+5-i} + \varepsilon_{2,N+4-i} - \varepsilon_{2,N+5-i} - \\ & - \varepsilon_{3,N+4-i} + \varepsilon_{3,N+5-i} - \varepsilon_{4,N+4-i} + \varepsilon_{4,N+5-i}\, , \ldots] \, . \end{aligned} \tag{6.72}$$

Поради това, само ако $j_1, j_2 \geqq N/2$ и $r_i \geqq 4$ за всяко i, броят състояния е 2^{4N} [8] и формулата за характера на L_Λ е (6.70):

$$ch\ L_\Lambda \ = ch\ \tilde{V}^\Lambda \ = \ ch\ \hat{V}^\Lambda \ \cdot \ ch_0\ \tilde{V}_0^\Lambda \ , \qquad d \ > \ d_{\max}\ , \tag{6.73а}$$

$$j_1, j_2 \geq N/2, \quad r_i \geq 4, \ i = 1, \ldots, N-1\, . \tag{6.73б}$$

[7] Суперполе е функция, дефинирана върху суперпространството (виж глава 7)

Общата формула за $ch\ L_\Lambda$ записваме по подобен начин:

$$ch\ L_\Lambda \ = \ ch\ \hat{L}_\Lambda \ \cdot \ ch_0\ \tilde{V}_0^\Lambda \ . \tag{6.74}$$

Оттук-нататък ще пишем формулите само за $ch\ \hat{L}_\Lambda$**.** Така формула (6.73б) е еквивалентна на:

$$ch\ \hat{L}_\Lambda \ = \ ch\ \hat{V}^\Lambda \ , \quad j_1, j_2 \geq N/2, \quad r_i \geq 4, \forall\, i\ . \tag{6.75}$$

Преминавайки в тази факторизирана форма, която е по-кратка, не губим информация.

Ако условията (6.73б) не са изпълнени, тогава трябва да се извърши по детайлен анализ. Класифицираме състоянията чрез следните величини с оглед опростяване на изложението:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^c &\equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2\,, \\ \varepsilon_j^a &\equiv \varepsilon_3 - \varepsilon_4\,, \\ \varepsilon_r^i &\equiv \varepsilon_{1,5+i} + \varepsilon_{2,5+i} + \varepsilon_{3,4+i} + \varepsilon_{4,4+i} - \varepsilon_{1,4+i} - \varepsilon_{2,4+i} - \varepsilon_{3,5+i} - \varepsilon_{4,5+i}\,, \\ & i = 1, \ldots, N-1\,. \end{aligned} \tag{6.76}$$

Предвид (6.72), условията, които трябва да бъдат изпълнени, за да се реализира състоянието ε_{ij}, са следните:

$$\varepsilon_j^c \ \leqq \ 2j_1\,, \tag{6.77а}$$

$$\varepsilon_j^a \ \leqq \ 2j_2\,, \tag{6.77б}$$

$$\varepsilon_r^i \ \leqq \ r_{N-i}\,, \quad i = 1, \ldots, N-1\,. \tag{6.77в}$$

Но тези условия са достатъчни само в случая $N = 1$. Точните условия са:

Критерий: Необходимото и достатъчно условие, за да се реализира състоянието $\Psi_{\overline{\varepsilon}}$ с ниво ε, е системата (6.77) да се удовлетворява, както и въпросното състояние да е произлязло от състояние с ниво $\varepsilon - 1$, което е разрешено.

Втората част от критерия елиминира невъзможни кирални (или антикирални) състояния, [8] които се наблюдават, когато някое ε_{aj} допринася към противоположните страни на неравенствата (6.77а) и (6.77в), (или (6.77б) и (6.77в)) и $j_1 = r_i = 0$, (или $j_2 = r_i = 0$). Следователно, формулата за характерите може да бъде записана така:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda \ = \ ch\,\tilde{V}^\Lambda - \mathcal{R}\,, \quad d > d_{max}\,, \quad \mathcal{R} = e(\hat{V}^\Lambda_{excl}) = \sum_{\substack{\text{изключени} \\ \text{състояния}}} e(\Psi_{\overline{\varepsilon}}) \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned} e(\Psi_{\overline{\varepsilon}}) = &\left(\prod_{k=N}^{1} e(\alpha_{1,4+k})^{\varepsilon_{1,4+k}} \right) \left(\prod_{k=N}^{1} e(\alpha_{2,4+k})^{\varepsilon_{2,4+k}} \right) \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{3,4+k})^{\varepsilon_{3,4+k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{N} e(\alpha_{4,4+k})^{\varepsilon_{4,4+k}} \right) |\Lambda\rangle\ , \end{aligned}$$

където контрачленовете $\mathcal{R}$ образуват $\hat{V}^\Lambda_{excl}$ – множеството от всички състояния (т.е. множеството от всички ε_{jk}), които нарушават критерия.

[8] Кирални (антикирални) състояния са тези, за които $\varepsilon_{a,4+k} = 0,\ a = 3,4\ (1,2)$ (виж формула (4.37).

Важно е да се отбележи, че има само N антикирални състояния, които могат да бъдат построени единствено чрез $X^{+}_{4,4+k}$:

$$X^{+}_{4,5+N-k}X^{+}_{4,6+N-k}\cdots X^{+}_{4,4+N}\,|\Lambda\rangle\ ,\quad k=1,\ldots,N\,,j_2=r_i=0,\,\forall i\,, \tag{6.79}$$

което е следствие от (6.77в), т.к. за тези състояния е изпълнено $\varepsilon_{4,4+N-i}\leqq\varepsilon_{4,5+N-i}$ за $i=1,\ldots,N-1$.

6.3 Представяния, свързани с еднократно (нечетно) преводими модули на Верма

- **a** $d=d^1_{N1}=d^a\equiv 2+2j_2+z+2m_1-2m/N>d^3_{NN}$.
  - Нека първо $j_2>0$. В този случай е изпълнено нулевото условие [7] (виж също (5.54б)):

$$P_{3,4+N}\,|\Lambda\rangle=\left(2j_2X^{+}_{3,4+N}-X^{+}_4X^{+}_2\right)|\Lambda\rangle=0\,. \tag{6.80}$$

Условие (6.80) означава, че генераторът $X^{+}_{3,4+N}$ е елиминиран от базиса, построен върху младшия вектор $|\Lambda\rangle$. Следователно, за $N=1$ и, ако $r_1>0$, за $N>1$ формулата, задаваща характера, е:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda\ =\ \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+_{\bar{1}}\\ \alpha\neq\alpha_{3,4+N}}}(1+e(\alpha))-\mathcal{R}\,,\quad j_2r_1>0\,. \tag{6.81}$$

В случай, че е изпълнено $j_1\geqq N/2$, $j_2\geqq(N-1)/2$ и $r_i\geqq 4$ за всички i, няма контрачленове и броят състояния е 2^{4N-1}. Формула (6.81) може да бъде записана и като се използва нечетното отражение при $\beta=\alpha_{3,4+N}$:

$$\begin{aligned} ch\,\hat{L}_\Lambda\ &=\ ch\,\hat{V}^\Lambda-\frac{1}{1+e(\alpha_{3,4+N})}ch\,\hat{V}^{\hat{s}_{\alpha_{3,4+N}}\cdot\Lambda}-\mathcal{R}= && \text{(6.82а)}\\ &=\sum_{\hat{s}\in\hat{W}_{\alpha_{3,4+N}}}(-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot ch\,\hat{V}^\Lambda-\mathcal{R}\,, && \text{(6.82б)}\end{aligned}$$

където $\hat{W}_\beta\equiv\{1,\hat{s}_\beta\}$. Можем да дефинираме действие нечетно отражение върху характерите:

$$\hat{s}_\beta\cdot ch\,V^\Lambda=\frac{1}{1+e(\beta)}ch\,V^{\hat{s}_\beta\cdot\Lambda}=\frac{1}{1+e(\beta)}ch\,V^{\Lambda+\beta}=\frac{e(\beta)}{1+e(\beta)}ch\,V^\Lambda\,. \tag{6.83}$$

Работим само с $\hat{W}_\beta$, защото само единичният елемент и генераторът $\hat{s}_\beta$ действат нетривиално, т.к. действието на $\hat{s}_\beta$ върху характерите е нилпотентно:

$$(\hat{s_\beta})^2\cdot ch\,V^\Lambda=0\,. \tag{6.84}$$

Дефинираме по-обща формула за действие на нечетните генератори върху полиноми $\mathcal{P}\in E(\mathcal{H}^*)$. За разлика от (6.83), сега дефинираме действието на $\hat{s}_\beta$ върху $\mathcal{P}$ като хомогенен оператор, третиращ $e(\beta)$ като променлива:

$$\hat{s}_\beta\cdot\mathcal{P}\ \equiv\ e(\beta)\frac{\partial}{\partial e(\beta)}\mathcal{P}\,, \tag{6.85}$$

където β може да бъде корен или сума от корени. Очевидно, ако $\mathcal{P}$ е моном, който съдържа мултипликативен фактор $1+e(\beta)$, действието (6.85) е еквивалентно на (6.83).

В много случаи формулите (6.82),(6.83) могат да бъдат записани и така:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda \;=\; \sum_{\hat{s}\in\hat{W}_\beta}(-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot\left(ch\,\hat{V}^\Lambda - \mathcal{R}_{long}\right)\,, \tag{6.86}$$

където $\mathcal{R}_{long}$ е съвкупността от контрачленовете за дългите полета със същите стойности на j_1 и r_i както Λ, докато стойността на j_2 е нула, когато j_2 от Λ е нула, в противен случай $j_2 \geqq N/2$. Записването на (6.81) като (6.82) (или като (6.86)) е начин за изрязване на характера на редуцирания модул L_Λ. Той е съгласуван със структурата на $\tilde{V}^\Lambda$ (4.33). Модулът $\hat{V}^\Lambda$ може да бъде интерпретиран, когато няма контрачленове, като следната декомпозиция:

$$\hat{V}^\Lambda = \hat{L}_\Lambda \oplus \hat{L}_{\Lambda+\beta}\,, \tag{6.87}$$

за $\beta = \alpha_{3,4+N}$. Наистина, за произволни сигнатури $\hat{L}_{\Lambda+\beta}$ е изоморфно на $\hat{L}_\Lambda$ като векторно пространство, което се дължи на факта, че $V^{\Lambda+\beta}$ е преводим по същия начин както и V^Λ (единствената разлика е, че вакуумното състояние на $V^{\Lambda+\beta}$ се получава от това на V^Λ чрез действието на $\beta = \alpha_{3,4+N}$). Поради тази причина, когато няма контрачленове, $\hat{L}_\Lambda$ и $\hat{L}_{\Lambda+\beta}$ имат идентични 2^{4N} на брой състояния. За $N > 1$ има възможност за допълнително редуциране на базиса. Нека $i_0 \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворява $0 \leqq i_0 \leqq N-1$ и $r_i = 0$ за $i \leqq i_0$ и, ако $i_0 < N-1$, тогава $r_{i_0+1} > 0$. Когато $i_0 > 0$, генераторите $X^+_{3,4+N-i}, i = 1,\ldots,i_0$, са елиминирани от базиса. Това е следствие от

$$P_{3,4+N-i}\,|\Lambda\rangle = \left(2j_2X^+_{3,4+N-i} - X^+_{4,4+N-i}X^+_2\right)|\Lambda\rangle = 0\,,\quad i \leqq i_0\,. \tag{6.88}$$

Формулата за характера е:

$$\begin{aligned}
ch\,\hat{L}_\Lambda &= \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+_{\bar{1}}\\ \alpha\neq\alpha_{3,5+N-k}\\ k=1,\ldots,1+i_0}} (1+e(\alpha)) - \mathcal{R} = && \text{(6.89а)}\\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^a_{i_0}}(-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot ch\;\hat{V}^\Lambda \;-\; \mathcal{R} = && \text{(6.89б)}\\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^a_{i_0}}(-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot\left(ch\;\hat{V}^\Lambda \;-\; \mathcal{R}_{\rm long}\right) = && \text{(6.89в)}\\
\hat{W}^a_{i_0} &\equiv \hat{W}_{\alpha_{3,N+4}}\times\hat{W}_{\alpha_{3,N+3}}\times\cdots\times\hat{W}_{\alpha_{3,N+4-i_0}}\,.
\end{aligned}$$

Ограниченията (6.77), нужни за определяне на контрачленовете, са с $\varepsilon_{3,5+N-k} = 0\,,\ k = 1,\ldots,1+i_0$. Формули (6.81),(6.82),(6.86) са специален случай на

(6.89а),(6.89б),(6.89в), съответно, за $i_0 = 0$. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е 2^{4N-1-i_0}. Това е броят състояния, получени при действието на групата на Вайл $\hat{W}^a_{i_0}$ върху $ch\,\hat{V}^\Lambda$. Контрачленовете са получени от действието на вайловата група върху $\mathcal{R}_{long}$.

- Нека сега $j_2 = 0$. Тогава всички нулеви условия горе следват от (5.49), така че тези условия не означават елиминиране на съответните вектори. В този случай имаме следното нулево условие:

$$X^+_{3,4+N} X^+_{4,4+N}\, |\Lambda\rangle = X^+_4 X^+_2 X^+_4\, |\Lambda\rangle = 0\,. \tag{6.90}$$

Състоянието в (6.90) и всичките тези 2^{4N-2} на брой, които произхождат от него, са нули за всяко N. Затова формулата, задаваща характера, е сходна с (6.82), но $\alpha_{3,4+N}$ е заменен с $\beta_{12} = \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}$:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda = \sum_{\hat{s}\in\hat{W}_{\beta_{12}}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot\Big(ch\,\hat{V}^\Lambda - \mathcal{R}_{long}\Big)\,, \quad N=1 \text{ или } r_1>0\,, \tag{6.91}$$

където $\hat{W}_{\beta_{12}} \equiv \{1, \beta_{12}\}$. Вижда се, че за $N = 1$ формула (6.91) е еквивалентна на (6.81). Тези L_Λ, за които всички $r_i = 0$, включват само N-те антикирални състояния, посочени в (6.79). Следователно, характерът е:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda = \sum_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{k} e(\alpha_{4,5+N-i}) + \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+_{\bar{1}}\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0}} (1+e(\alpha)) - \mathcal{R}\,, \quad j_2 = r_i = 0, \forall i\,. \tag{6.92}$$

- **b** $d = d^2_{N1} = z + 2m_1 - 2m/N > d^3_{NN}\,,\quad j_2 = 0$. Тук е изпълнено нечетното нулево условие:

$$X^+_4\, |\Lambda\rangle = X^+_{4,4+N}\, |\Lambda\rangle = 0\,. \tag{6.93}$$

Тъй като $j_2 = 0$ от (5.49б) и (6.93), изпълнено е допълнителното условие:

$$X^+_{3,4+N}\, |\Lambda\rangle = \big[X^+_2, X^+_4\big]\, |\Lambda\rangle = 0\,. \tag{6.94}$$

За $N > 1$ има допълнителни рекурсивни нулеви условия, ако $r_i = 0,\ i \leqq i_0 < N$, които са следствие от (5.46б) и (6.94):

$$X^+_{3,4+N-i}\, |\Lambda\rangle \;=\; [X^+_{3,5+N-i}, X^+_{4+N-i}]\, |\Lambda\rangle \;=\; 0, r_j = 0, 1 \le j \le i \le i_0\,, \tag{6.95а}$$

$$X^+_{4,4+N-i}\, |\Lambda\rangle \;=\; [X^+_{4,5+N-i}, X^+_{4+N-i}]\, |\Lambda\rangle \;=\; 0, r_j = 0, 1 \le j \le i \le i_0\,. \tag{6.95б}$$

Следователно $2(1 + i_0)$-те на брой генератори $X^+_{3,5+N-k}, X^+_{4,5+N-k},\ k = 1, \ldots, 1 + i_0,$ са елиминирани. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е $2^{4N-2-2i_0}$. Характерът е:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda = \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+_{\bar{1}}\\ \alpha\neq\alpha_{a,5+N-k}\\ a=3,4\,,\ k=1,\dots,1+i_0}} (1+e(\alpha)) - \mathcal{R} = \tag{6.96а}$$

$$= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^b_{i_0}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot ch\,\hat{V}^\Lambda - \mathcal{R}\,, \tag{6.96б}$$

$$\begin{aligned}\hat{W}^b_{i_0} \equiv& \hat{W}_{\alpha_{3,N+4}}\times\hat{W}_{\alpha_{3,N+3}}\times\ \dots\ \times\hat{W}_{\alpha_{3,N+4-i_0}}\times\\ &\times\hat{W}_{\alpha_{4,N+4}}\times\hat{W}_{\alpha_{4,N+3}}\times\ \dots\ \times\hat{W}_{\alpha_{4,N+4-i_0}}\,,\\ d\ =&\ d^2_{N1} > d^3_{NN}\ ,\quad j_2=0\ \ r_i=0,\ i\leq i_0\ ,\end{aligned} \tag{6.96в}$$

където използваме $\varepsilon_{a,4+k}=0,\ a=3,4,\ k=1,\dots,1+i_0$, за да определим контрачленовете.

- **c** $d=d^3_{NN}=d^c\equiv 2+2j_1-z+2m/N > d^1_{N1}$
- **d** $d=d^4_{NN}=-z+2m/N>d^1_{N1}\,,\quad j_1=0\,.$

  Тези случаи са спрегнати съответно на **a, b**. Всички резултати могат да бъдат получени чрез субституцията (за $a=1,2,\ k=1,\dots,N$):

  $$j_1\longleftrightarrow j_2\quad r_i\longleftrightarrow r_{N-i}\quad z\longleftrightarrow -z\quad \alpha_{a,4+k}\longleftrightarrow\alpha_{4-a,N+5-k}$$

  и затова няма да се спираме подробно на тях.

6.4 Представяния, свързани с двукратно (нечетно) преводими модули на Верма

Нека първо $N>1$ и $r_1r_N-1>0$, (т.е. $i_0=i'_0=0$). Тогава е валидна следната формула за характерите:

$$ch\,\hat{L}_\Lambda = \sum_{\hat{s}\in\hat{W}_{\beta,\beta'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\hat{s}\cdot ch\,\hat{V}^\Lambda - \mathcal{R}\,, \tag{6.97а}$$

$$\hat{W}_{\beta,\beta'}\equiv\hat{W}_\beta\times\hat{W}'_\beta \tag{6.97б}$$

- **ac** $d\ =\ d_{max}=d^1_{N1}=d^3_{NN}=d^{ac}\equiv 2+j_1+j_2+m_1$. За тези полукъси двукратно преводими представяния е валидно нулевото условие (6.80) и неговото спрегнато. За $N>1$, ако $r_i=0,\ i=1,\dots,i_0$, е валидно (6.88) и, ако $r_{N-i}=0,\ i=1,\dots,i'_0$, е валидно и спрегнатото на (6.88). Има две основни ситуации. Първата е за $i_0+i'_0\leqq N-2$. Това означава, че не всички r_i са нула и всички елиминации се извършват както е описано в •**a** и •**c**. Тези полукъси UIRs се наричат *грасманово-аналитични (Grassmann-analytic)* [18], т.к. нечетни генератори с различни киралности са елиминирани. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е $2^{4N-2-i_0-i'_0}$. Втората ситуация се реализира, когато $i_0+i'_0\leqq N-2$ не се изпълнява, което означава, че всички r_i са нули и всъщност имаме $i_0=i'_0=N-1$. Тогава всички генератори $X^+_{1,4+k}$ и $X^+_{3,4+k}$ са елиминирани. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е 2^{2N}.

За $j_1 j_2 > 0$, формулата за характерите е комбинация от (6.89) и неговото спрегнато:

$$
\begin{aligned}
ch\ \hat{L}_\Lambda \ &= \prod_{\substack{\alpha\in\Delta_{\bar 1}^+ \\ \alpha\neq\alpha_{1,4+k}\,, \\ k=1,\dots,1+i_0' \\ \alpha\neq\alpha_{3,5+N-j}\,, \\ j=1,\dots,1+i_0}} (1+e(\alpha)) \ - \ \mathcal{R} \ = && (6.98а)\\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{ac}_{i_0,i_0'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot ch\ \hat{V}^\Lambda \ - \ \mathcal{R}\ , && (6.98б)\\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{ac}_{i_0,i_0'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot \Big(ch\ \hat{V}^\Lambda \ - \ \mathcal{R}_{long}\Big)\ , && (6.98в)\\
&\hat{W}^{ac}_{i_0,i_0'} \ \equiv \ \hat{W}^a_{i_0} \ \times \hat{W}^c_{i_0'}\ , && (6.98г)\\
&d \ = \ d_{\max} \ = \ d^1_{N1} = d^3_{NN} = 2 + j_1 + j_2 + m_1\,, \quad j_1 j_2 > 0,\\
\text{или}\ \ & i_0 + i_0' \leq N-2,\\
& r_i = 0,\ i = 1,2,\dots,i_0, N-i_0', N-i_0'+1,\dots,N-1,\\
& r_i > 0,\ i = i_0+1, N-i_0'-1\ ,\\
\text{или}\ \ & i_0 = i_0' = N-1\ , \quad r_i = 0,\ \forall\, i
\end{aligned}
$$

За $j_1 > 0,\ j_2 = 0$ характерът се изразява чрез комбинация на (6.91) и спрегнатия на (6.89).

$$
\begin{aligned}
ch\ \hat{L}_\Lambda \ &= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{a'c}_{i_0'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot ch\ \hat{V}^\Lambda \ - \ \mathcal{R} \ = && (6.99а)\\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{a'c}_{i_0'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot \Big(ch\ \hat{V}^\Lambda \ - \ \mathcal{R}_{\rm long}\Big)\ , && (6.99б)\\
\hat{W}^{a'c}_{i_0'} \ &\equiv \hat{W}_{\beta_{12}} \ \times \ \hat{W}^c_{i_0'}\ , \qquad \beta_{12} = \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}\ , && (6.99в)\\
&d \ = \ d_{\max} \ = \ d^1_{N1} = d^3_{NN} = 2 + j_1 + m_1\ ,\\
&j_1 > 0,\ j_2 = 0\ , \quad r_1 > 0\ .
\end{aligned}
$$

За R–симетрични скалари комбинираме (6.90) и (6.89а):

$$
ch\ \hat{L}_\Lambda \ = \ \sum_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{k} e(\alpha_{4,5+N-i}) \ + \prod_{\substack{\alpha\in\Delta_{\bar 1}^+ \\ \alpha\neq\alpha_{1,4+k}\,, \\ k=1,\dots,N \\ \varepsilon_2>0}} (1+e(\alpha)) \ - \ \mathcal{R}\ , \tag{6.100}
$$

$$
\begin{aligned}
&d \ = \ d_{\max} \ = \ d^1_{N1} = d^3_{NN} = 2 + j_1\ ,\\
&j_1 > 0, j_2 = 0\ , \quad r_i = 0,\ \forall\, i\ .
\end{aligned}
$$

Случаят $j_1 = 0, j_2 > 0$ се получава от предишния чрез спрягане.

За $j_1 = j_2 = 0$ формулата за характера е комбинация от (6.91) и неговото спрегнато:

$$\begin{aligned} ch\ \hat{L}_\Lambda \ &= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{a'c'}_{i'_0}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot ch\ \hat{V}^\Lambda\ -\ \mathcal{R}\ = && (6.101\text{а})\\ &= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{a'c'}_{i'_0}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot \Big(ch\ \hat{V}^\Lambda\ -\ \mathcal{R}_{\rm long}\Big)\ , && (6.101\text{б})\\ \hat{W}^{a'c'}_{i'_0}\ &\equiv \hat{W}_{\beta_{12}}\ \times\ \hat{W}_{\beta_{34}}\ , && (6.101\text{в})\\ &\quad d\ =\ d_{\rm max}\ =\ d^1_{N1} = d^3_{NN} = 2 + m_1\ , \\ &\quad j_1 = j_2 = 0\ ,\quad r_1 r_{N-1} > 0\ . && (6.101\text{г}) \end{aligned}$$

За R–симетрични скалари комбинираме (6.92) и неговото спрегнато:

$$ch\ \hat{L}_\Lambda\ = \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^k\ e(\alpha_{2,4+i})\ +\ \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^k e(\alpha_{4,5+N-i})\ + \\ +\ \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+_{\bar 1}\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0\\ \varepsilon_3+\varepsilon_4>0}}\ (1+e(\alpha))\ -\ \mathcal{R}\ , \tag{6.102}$$

$$d\ =\ d_{\rm max}\ =\ d^1_{N1} = d^3_{NN} = 2\ ,\quad z = 0\ , \\ j_1 = j_2 = 0\ ,\quad r_i = 0,\ \forall\, i\ .$$

- **ad** $\quad d = d^1_{N1} = d^4_{NN} = 1 + j_2 + m_1\ ,\quad j_1 = 0.$

  При тези къси двукратно преводими представяния са валидни трите нулеви условия (6.80),(6.93) и (6.94). Освен това, за $N > 1$, ако $r_i = 0,\ i = 1,\dots,i_0$, важи (6.88) и, ако $r_{N-i} = 0,\ i = 1,\dots,i'_0$, валидно е също и спрегнатото на (6.95).

  Ако $i_0 + i'_0 \leqq N-2$, всички елиминации са като тези, които са описани поотделно в случаи **•a** и **•d**. Всички тези представяния са грасманово-аналитични UIRs. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е $2^{4N-3-i_0-2i'_0}$. Интересен пример са т.нар. BPS състояния [17],[19],[18],[20],[21],[22],[23],[24]. Те се характеризитат с броя κ на нечетните генератори, които ги унищожават - съответното състояние се нарича $\frac{\kappa}{4N}$-BPS състояние. Например, да разгледаме $N = 4$ и $\frac{1}{4}$-BPS състояния със $z = 0\ \Rightarrow\ d = 2m/N$. Такъв е случаят, отговарящ на $i_0 = 1, i'_0 = 0, j_2 > 0$. Тогава $d = \frac{1}{2}(2r_2 + 3r_3),\ r_1 = 0,\ r_2 > 0,\ r_3 = 2(1 + j_2)$.

  За $j_2 m_1 > 0$ формулата за характерите е комбинация на (6.89) и спрегнатото на (6.93):

$$ch\ \hat{L}_\Lambda \ = \prod_{\substack{\alpha\in\Delta_{\bar 1}^+ \\ \alpha\neq\alpha_{3,5+N-k}\ , \\ k=1,\dots,1+i_0 \\ \alpha\neq\alpha_{a,4+j}\ , \\ a=1,2\ ,\ j=1,\dots,1+i'_0}} (1+e(\alpha)) \ - \ \mathcal{R} \ = \tag{6.103а}$$

$$= \sum_{\hat s\in\hat W^{ad}_{i_0,i'_0}} (-1)^{\ell(\hat s)}\ \hat s\cdot ch\ \hat V^\Lambda \ - \ \mathcal{R}\ , \tag{6.103б}$$

$$\hat W^{ad}_{i_0,i'_0} \ \equiv \ \hat W^a_{i_0} \ \times \hat W^d_{i'_0}\ , \tag{6.103в}$$

$$\begin{aligned} & d \ = \ d^1_{N1} = d^4_{NN} \ = \ 1 + j_2 + m_1\ , \quad j_1 = 0, j_2 > 0\ , \quad i_0 + i'_0 \leq N-2, \\ & r_i = 0,\ i = 1,2,\dots,i_0, N-i'_0, N-i'_0+1,\dots,N-1, \\ & r_i > 0,\ i = i_0+1, N-i'_0-1\,. \end{aligned} \tag{6.103г}$$

За $j_2 = 0, m_1 > 0$ характерът е комбинация на (6.91) и спрегнатото на (6.96а):

$$ch\ \hat{L}_\Lambda \ = \sum_{\hat s\in\hat W^{a'd}_{i'_0}} (-1)^{\ell(\hat s)}\ \hat s\cdot ch\ \hat V^\Lambda \ - \ \mathcal{R}\ , \tag{6.104а}$$

$$\hat W^{a'd}_{i'_0} \ \equiv \hat W_{\beta_{12}} \ \times \ \hat W^d_{i'_0}\ , \tag{6.104б}$$

където $\beta_{12} = \alpha_{3,4+N} + \alpha_{4,4+N}$.

В случая на R–симетрични скалари имаме $i_0 = i'_0 = N-1$, $\kappa = 3N$ и всички генератори $X^+_{1,4+k}$, $X^+_{2,4+k}$, $X^+_{3,4+k}$ са елиминирани. Тук е валидно $d = -z = 1 + j_2$. Тези антикирални непреводими представяния образуват една от трите серии *безмасови (massless)* UIRs. Те се бележат с χ^+_s, $s = j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, [8], секция 3. Освен вакуума, в $\hat L_\Lambda$ се съдържат само N състояния, които се задават с (6.79) за $k = 1,\dots,N$. Те се наричат *ултракъси (ultrashort)* UIRs. Формулата за характера изглежда така:

$$\begin{aligned} & ch\ \hat{L}_\Lambda \ = 1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} e(\alpha_{4,5+N-i})\ , \\ & d \ = \ d^1_{N1} = d^4_{NN} = 1 + j_2 = -z\ , \\ & j_1 = 0\ , \quad r_i = 0,\ \forall\, i\ , \end{aligned} \tag{6.105}$$

и е валидна за всяко j_2.

- **bc** $\quad d \ = \ d^2_{N1} = d^3_{NN} = 1 + j_1 + m_1,\ j_2 = 0, z = 2m/N - m_1 + 1 + j_1.$

Този случай е спрегнат на предишния и всички резултати могат да бъдат получени както в случаите, спрегнати на еднократно преводимите представяния. Затова няма да се спираме подробно на него, а само ще дадем явния вид на формулите за характерите на втората серия безмасови полета. Разглеждаме представяния, за които при $N > 1$, $r_i = 0,\ i = 1,\dots,i_0$, $r_{N-i} = 0,\ i = 1,\dots,i'_0$. Тези безмасови полета се реализират в случая на R–симетрични скалари, където $i_0 = i'_0 = N-1$, $\kappa = 3N$ и всички генератори $X^+_{1,4+k}$, $X^+_{3,4+k}$, $X^+_{4,4+k}$, са елиминирани. Те са спрегнати на първите и се означават с χ_s, $s = j_1 = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$, в секция 3 на [8]. Освен вакуума, те съдържат само N състояния в $\hat{L}_\Lambda$. Наричат се *ултракъси (ultrashort UIRs)*. Характерите се задават с:

$$ch\ \hat{L}_\Lambda = 1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{k} e(\alpha_{2,4+i}) \ , \tag{6.106а}$$

$$d = d^2_{N1} = d^3_{NN} = 1 + j_1 = z \ , \tag{6.106б}$$

$$j_2 = 0 \ , \quad r_i = 0, \ \forall i \ , \tag{6.106в}$$

валидно за всяко j_1.

- **bd** $\quad d = d^2_{N1} = d^4_{NN} = m_1 \ , \ \ j_1 = j_2 = 0, \quad z = 2m/N - m_1$.

В тези къси двукратно преводими случаи са изпълнени четирите нулеви условия (6.93),(6.94) и техните спрегнати.

За $N = 1$ това е тривиалното непреводимо представяне $d = j_1 = j_2 = z = 0$, т.к. имаме нулевото условие $X^+_k |\Lambda\rangle = 0$ за генераторите, съответстващи на всички прости корени (следователно то е изпълнено и за всички генератори). Очевидно непреводимото представяне се състои само от вакуумното състояние $|\Lambda\rangle$.

За $N > 1$ ситуацията не е тривиална. В допълнение към изброените условия и, ако $r_i = 0, i = 1, \ldots, i_0$, тогава е изпълнено (6.95) и, ако $r_{N-i} = 0, i = 1, \ldots, i'_0$, тогава са изпълнени и неговите спрегнати.

Ако $i_0 + i'_0 \leq N-2$, всички елиминации са като тези, описани поотделно за случаите **•b** и **•d**. Тези представяния са също грасманово-аналитични UIRs. Максималният брой състояния в $\hat{L}_\Lambda$ е $2^{4N-4-2i_0-2i'_0}$. При $N = 4$ за BPS случаите избираме $z = \frac{1}{2}(r_3 - r_1) = 0 \Rightarrow d = 2r_1 + r_2$. В $\frac{1}{4}$-BPS случай имаме $i_0 = i'_0 = 0$, $r_1 = r_3 > 0$.

Най-интересен е случаят $i_0 + i'_0 = N-2$, когато има само един ненулев r_i, именно, $r_{1+i_0} = r_{N-1-i'_0} > 0$, докато останалите r_i са нула. Следователно, параметрите в диаграмата на Юнг са: $m_1 = r_{1+i_0}$, $m = (1+i_0)r_{1+i_0}$.
Важен подслучай е $d = m_1 = 1$, когато имаме $m = i_0 + 1 = N - 1 - i'_0$, $r_i = \delta_{mi}$. Тези непреводими представяния формират третите серии на *безмасовите* UIRs. В секция 3 на [8] те са параметризирани чрез $n \in I\!N$, $\frac{1}{2}N \leq n < N$, и са означени чрез χ'_n, $n = m$, $(z = 2n/N - 1)$, χ'^{+}_n, $n = N - m$, $(z = 1 - 2n/N)$. За четни N има съвпадение: $\chi'_n = \chi'^{+}_n$, където $n = m = N - m = N/2$. Ще параметризираме тези UIRs чрез параметъра $i_0 = 0, 1, \ldots, N-2$.

Друг подслучай са $\frac{1}{2}$-BPS състоянията за четни N с $z = 0 \Rightarrow d = m_1 = 2m/N \Rightarrow i_0 = i'_0 = N/2 - 1 \Rightarrow m_1 = r_{N/2}$, $m = \frac{N}{2} r_{N/2}$. Те са също безмасови само ако $r_{N/2} = 1$, което е самоспрегнатият случай: χ'_n, $n = N/2$. За $N = 4$ имаме: $i_0 = i'_0 = 1$, $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 > 0$, който е също безмасов, ако $r_2 = 1$.

Най-накрая, в случай на R–симетрични скалари имаме $i_0 = i'_0 = N-1$ и всички $4N$ нечетни генератори $X^+_{1,4+k}$, $X^+_{2,4+k}$, $X^+_{3,4+k}$, $X^+_{4,4+k}$, са елиминирани, при което всички квантови числа са нули, (5.60г), което е тривиалното непреводимо представяне (както и за $N = 1$).

За $m_1 > 0$ съответната формула за характерите е комбинация на (6.96) и неговия спрегнат:

$$
\begin{aligned}
ch\ \hat{L}_\Lambda \ &= \prod_{\substack{\alpha\in\Delta_{\bar{1}}^+ \\ \alpha\neq\alpha_{a,4+k} \\ a=1,2\ ,\ k=1,\ldots,1+i_0' \\ \alpha\neq\alpha_{b,5+N-j} \\ b=3,4\ ,\ j=1,\ldots,1+i_0}} (1+e(\alpha)) \ - \ \mathcal{R} \ = && (6.107\text{а}) \\
&= \sum_{\hat{s}\in\hat{W}^{bd}_{i_0,i_0'}} (-1)^{\ell(\hat{s})}\ \hat{s}\cdot ch\ \hat{V}^\Lambda \ - \ \mathcal{R}\ , && (6.107\text{б}) \\
&\hat{W}^{bd}_{i_0,i_0'} \ \equiv \ \hat{W}^b_{i_0} \ \times \hat{W}^d_{i_0'}\ , && (6.107\text{в}) \\
&d \ = \ d^2_{N1} = d^4_{NN} = m_1\ , \quad j_1 = j_2 = 0\ , \quad i_0 + i_0' \leq N-2, \\
&r_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,i_0, N-i_0', N-i_0'+1,\ldots,N-1, \\
&r_i > 0,\ i = i_0+1, N-i_0'-1\ , && (6.107\text{г})
\end{aligned}
$$

където $\mathcal{R}$ означава контрачленовете, пораждането на които е следствие на критерия, т.е. на условия (6.79) при $\varepsilon_{a,N+1-k} = 0,\ \ a = 1,2,\ \ k = 1,\ldots,1+i_0'\,,\ \ \varepsilon_{bj} = 0,\ \ b = 3,4,\ k = j,\ldots,1+i_0\,.$

За третата серия безмасови UIRs можем да дадем много по-експлицитна формула за характерите без контрачленове. Да фиксираме параметъра $i_0 \ = \ 0,1,\ldots,N-2$. Тогава се съдържат само следните състояния в $\hat{L}_\Lambda$:

$$
\begin{aligned}
&X^+_{2,N+4-j}\ \cdots\ X^+_{2,N+4-i_0}\ |\Lambda\rangle\ , \quad j = 0,1,\ldots,i_0\ , && (6.108\text{а}) \\
&X^+_{4,4+k}\ \cdots\ X^+_{4,N+3-i_0}\ |\Lambda\rangle\ , \quad k = 1,\ldots,N-1-i_0\ , && (6.108\text{б})
\end{aligned}
$$

т.е. всичко N състояния, освен вакуума. Характерът се задава чрез

$$
\begin{gathered}
ch\ \hat{L}_\Lambda \ = 1 \ + \ \sum_{j=0}^{i_0} \prod_{i=j}^{i_0} e(\alpha_{2,N+4-i}) \ + \ \sum_{k=1}^{N-1-i_0} \prod_{i=k}^{N-1-i_0} e(\alpha_{4,4+i})\ , \\
d \ = \ d^2_{N1} = d^4_{NN} = m_1 = 1, \quad i_0 \ = \ 0,1,\ldots,N-2\ , \\
z = 2(i_0+1)/N-1\ , \quad j_1 = j_2 = 0\ , \quad r_i \ = \ \delta_{i,i_0+1}\ .
\end{gathered}
\tag{6.109}
$$

7 ER реализация на унитарните непреводими представяния на суперконформната алгебра

Дотук всички представяния бяха реализирани като модули на Верма. В тази глава ще разгледаме накратко паралелната картина, в която представянията са реализирани в пространството на суперполетата и се наричат ER (*elementary representations*). Както знаем от [7], суперполетата зависят от пространствено-времевите променливи на Минковски както и от $4N$ на брой грасманови координати θ_a^i, $\bar{\theta}_b^k$, $a, b = 1, 2$, $i, k = 1, \ldots, N$. Има еднозначна връзка между набора променливи, които параметризират грасмановото пространство, и нечетните нулеви условия, наложени върху $|\Lambda\rangle$. Именно, ако условието $X^+_{a,4+k}\ |\Lambda\rangle = 0$, $a = 1, 2$, се изпълнява, тогава суперполетата на съответното ER не зависят от променливата θ_a^k, докато, ако $X^+_{a,4+k}\ |\Lambda\rangle = 0$, $a = 3, 4$, суперполетата за това ER не зависят от променливата $\bar{\theta}^k_{a-2}$.

Супергрупата на Ли $SL(4/N;\mathbb{C})$ се реализира като матрична група с елементи

$$\begin{aligned} &\mathcal{G} \ = \ (\mathcal{G})_{mn} \ = \ \begin{pmatrix} \text{четни } (4\times 4) & \text{нечетни } (4\times N) \\ \text{нечетни } (N\times 4) & \text{четни } (N\times N) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, g_{mn} \in \mathcal{A}_{\overline{a}}\,, \\ &det\ \left(A - BD^{-1}C\right) \ = \ det\ D\,, \end{aligned} \tag{7.110}$$

където $\mathcal{A} \ = \ \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ е комплексна грасманова алгебра с краен брой нечетни генератори, така че всеки елемент от $\mathcal{A}$ е крайна сума на мономи на тези генератори. Конформната супергрупа на Ли $SU(2,2/N)$ е следната реална форма на супергрупата $SL(4/N;\mathbb{C})$:

$$\mathbb{G} \ = \ SU(2,2/N) \ = \ \left\{\mathcal{G} \in SL(4/N;\mathbb{C}) \ | \ \mathcal{G}^+ w \mathcal{G} = w\right\}\,, \tag{7.111}$$

където $\mathcal{G}^+_{mn} = \mathcal{G}^*_{mn}$, а $*$ е инволюция в $\mathcal{A}$; $* \circ * \ = \ id$. В околност на единицата $\mathbb{G} \ = \ exp\,\mathcal{G}(\mathcal{A})$, където $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathbb{R})_{(\bar{0})} \otimes \mathcal{G}_{(\bar{0})} \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R})_{\bar{1}} \otimes \mathcal{G}_{(\bar{1})}$ е грасмановата обвивка на $\mathcal{G}$ по отношение на $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \left\{\xi = \xi_{\bar{0}} + \xi_{(\bar{1})} \in \mathcal{A}\,;\ \xi^*_{\overline{a}} - (-i)^a \xi_{\overline{a}} = 0\right\}\,.$$

Суперпространството може да бъде идентифицирано с подгрупата на супертранслациите $\mathbf{X}$, която се параметризира чрез 4 четни и $4N$ нечетни елемента от $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbb{G} \ni \mathbf{x} \ = \ \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & i\underline{x} - 2\theta\bar{\theta} & 2\theta \\ 0 & \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -2\bar{\theta} & \mathbb{1}_N \end{pmatrix} ;\ \begin{matrix} x_\mu \in \mathcal{A}_{\bar{0}}\,,\ x^*_\mu = x_\mu\,,\ \theta^k_a \in \mathcal{A}_{\bar{1}}\,,\ \bar{\theta}^k_a \equiv (\theta^k_a)^*\,, \\ \underline{x} = \sigma_\mu x^\mu\,,\ (\theta\bar{\theta})_{ab} = \theta^k_a \bar{\theta}^k_b\,,\ k = 1, \ldots, N; a, b = 1, 2; \end{matrix} \right\}. \tag{7.112}$$

В матричната реализация (7.110) имаме:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \left\{ \begin{pmatrix} \ell\sigma_3^\nu e^{it/4} & 0 & 0 \\ 0 & \ell^{+-1}\sigma_3^\nu e^{it/4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it/N}u \end{pmatrix} \equiv \hat{\ell}\hat{\sigma_3^\nu}\xi(t)\hat{u}\,; \right. \\
\hat{\ell} &= \begin{pmatrix} \ell & 0 & 0 \\ 0 & \ell^{+-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_N \end{pmatrix}, \ \ell \in SL(2/0;\mathbb{C}) \ (\text{т.е. } \ell_{ab} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}\,,\, det\ell = 1)\,; \\
\hat{\sigma_3^\nu} &= \begin{pmatrix} \sigma_3^\nu & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_N \end{pmatrix}, \ \nu = 0,1\,;\ \xi(t) = \begin{pmatrix} e^{it/4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it/4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{it/N} \end{pmatrix}, \\
& t \in \mathcal{A}_{\bar{0}}(\mathbb{R})\,(mod\ 2\pi)\,; \\
\hat{u} &= \left. \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \ u \in SU(N/0) \right\}\,;
\end{aligned}
\tag{7.113}
$$

$$
\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\delta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_N \end{pmatrix} = a(\delta)\,,\, \delta = e^\tau\,,\, \tau \in \mathcal{A}_{\bar{0}}(\mathbb{R}) \right\}. \tag{7.114}
$$

7.1 Индуцирани представяния

Сега разглеждаме клас от $\mathcal{P}$–индуцирани представяния на конформната супергрупа $\mathbb{G}$ и нейната супералгебра на Ли $\mathcal{G}$, реализирани в пространството на суперполетата. Те са индуцирани от крайномерните непреводими представяния D_χ на $\mathcal{M}\mathcal{A}$ ($\mathcal{N}$ действа тривиално), където χ е сигнатурата (5.43) (както беше отбелязано, $2j_1, 2j_2;\ r_1, \ldots, r_{N-1}$ са неотрицателни цели числа, индексиращи представянето на $SL(2,\mathbb{C})$ и на $SU(N)$, d е конформното тегло, а z индексира представяне на $U(1)$, $d, z \in \mathbb{C}$). За случая $N = 4$ могат да се разглеждат представянията на факторгрупата $\mathbb{G}/U(1)$, избирайки $z = 0$.

Крайномерните представяния на $SL(2,\mathbb{C})$ се реализират в пространство $\underline{V}_j$ ($j \equiv (j_1, j_2)$) от хомогенни полиноми на комплексен вектор $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ и неговия спрегнат $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1, \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ [25]

$$
\underline{V}_j \equiv \left\{ \psi\ :\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \mid \psi(\lambda z, \mu\bar{z}) = \lambda^{2j_1}\mu^{2j_2}\psi(z,\bar{z}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda, \mu \neq 0 \right\}. \tag{7.115}
$$

Представянето $\mathcal{D}^j$ действа в $\underline{V}_j$ така:

$$
\left(\mathcal{D}^j(\hat{\ell})\psi\right)(z,\bar{z}) = \psi(\ell^{-1}z, \bar{z}\ell^{+-1})\,. \tag{7.116}
$$

Представянето на $\{1, \sigma_3\}$, (7.113), се индексира със сигнатурата $\varepsilon = 0, 1$. Неговото действие в $\underline{V}_j$ и действието на $L \cong SL(2;\mathbb{C}) \times \{1, \sigma_3\}$ в $\underline{V}_j$ се задава тогава така:

$$
\left(\mathcal{D}^\varepsilon(\hat{\sigma_3^\nu})\psi\right)(z,\bar{z}) = (-1)^{\varepsilon\nu}\psi(\sigma_3^\nu z, \bar{z}sn)\,; \quad \mathcal{D}^{j\varepsilon}(\hat{\ell}\hat{\sigma_3^\nu}) \equiv \mathcal{D}^j(\hat{\ell})\mathcal{D}^\varepsilon(\hat{\sigma_3^\nu})\,. \tag{7.117}
$$

Задаваме представянето на $SU(N)$ в пространството $\underline{V}_r$ $(r = (r_1, \ldots, r_{N-1}))$ от хомогенни полиноми върху $SU(N)$:

$$\underline{V}_r = \Big\{ \text{полиноми } \phi : SU(N) \;\to\; \mathbb{C},\; \phi\left(\ldots e^{i(\alpha_k - a_{k-1})} u^k \ldots, \ldots e^{-i(\alpha_k - \alpha_{k-1})} \bar{u}^k \ldots\right) \tag{7.118а}$$

$$= exp\left(i \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) m_k \right) \cdot \phi(u^1, \ldots, \bar{u}^N);\; (u^k)_i = U_{i,N+1-k}, U \in SU(N)\,,$$

$$\mathcal{D}_{ik}\phi \;\equiv\; \left(u^k \frac{\partial}{\partial u^i} - \bar{\theta}^i \frac{\partial}{\partial^k} \right) \phi \;=\; 0\,, \qquad 1 \leqq k < i \leqq N \Big\}\,. \tag{7.118б}$$

Изискването (7.118б) позволява елементите на $\underline{V}_r$ да зависят само от $N-1$ аргумента, т.е. $\phi = \phi(u^1, \ldots, u^{N-1})$. Представянето D^r на $SU(N)$ действа върху $\underline{V}_r$ така:

$$(\mathcal{D}_r(U)\phi)\,(u^1, \ldots, u^{N-1}) \equiv \phi(U^{-1}u^1, \ldots, U^{-1}u^{N-1})\,. \tag{7.119}$$

Представянето на $SL(2,\mathbb{C}) \times SU(N)$ се реализира в тензорното произведение $W_\chi = \underline{V}_j \otimes \underline{V}_r$ на двете крайномерни пространства $\underline{V}_j$ и $\underline{V}_r$. Представянето $\mathcal{D}^{j\varepsilon\lambda r}$ на групата $\underline{\mathcal{M}}$ действа в W_χ по следния начин:

$$\mathcal{D}^{j\varepsilon\lambda r}(\hat{\ell}\hat{\sigma_3^\nu}\xi(t)\hat{u}) \;\equiv\; exp(\frac{it}{2}\lambda_N)\mathcal{D}^{j\varepsilon}(\hat{\ell}\sigma_3^\nu)\mathcal{D}^r(\hat{u})\,, \quad \lambda_N \;\equiv\; \lambda\left(\frac{4-N}{2N} + \delta_{N4}\right)\,. \tag{7.120}$$

Т.к.

$$\xi(\pi)\xi(\pi) \;=\; \begin{pmatrix} exp(2\pi i/4)\mathbb{1}_4 & 0 \\ 0 & exp(2\pi i/N)\mathbb{1}_N \end{pmatrix}\,, \tag{7.121}$$

след заместване в (7.120), получаваме

$$\lambda_N \;+\; j_1 \;-\; j_2 \;+\; \frac{2m}{N} \;\in\; \mathbb{Z}\,, \quad \varepsilon \;=\; z + j_1 - j_2 + (2/N)\sum m_i \;(mod 2)\,. \tag{7.122}$$

Представянията $\mathcal{D}^{j\varepsilon\lambda r}$ на групата $\underline{\mathcal{M}}$ върху W_χ могат да бъдат продължени до представяния върху четната супергрупа $SL(2/0;\mathbb{C}) \times SU(N/0)$. ER се дефинират чрез следното условие за ковариантност в $\zeta_\chi \subset W_\chi$

$$F(gman) = D_\chi^{-1}(ma)F(g)\,, \tag{7.123}$$

където върху $F \in \zeta_\chi$ се реализират представянията ER. Действието на представянето $\mathcal{T}^\chi$ се задава чрез лявото регулярно действие

$$(\mathcal{T}^\chi(g)F) \equiv F(g^{-1}g)\,. \tag{7.124}$$

Друга реализация е посредством функции, които приемат значение в $\mathcal{A}_0$, удовлетворяващи (7.118б):

$$\mathcal{F}(g\hat{\ell}\hat{u}) \;=\; F(g, \pi(\ell), \overline{\pi(\ell)}, u)\,, \qquad (\pi(\ell))_a \;=\; \ell_{a2} \tag{7.125}$$

7.2 Инвариантни диференциални оператори

В общо положение ER са непреводими. Преводимите намираме чрез пригаждане на условията от алгебричната теория на Кац за основните класически супералгебри на Ли, която разглежда представянията като представяния с младше тегло. На всяко ER χ се съпоставя модул (LWM) над $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ с младше тегло $\Lambda = \Lambda(\chi) \in (\mathcal{H}^{\mathbb{C}})^*$ ($\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ е картановата подалгебра на $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$) и младши вектор v :

$$Hv \;=\; (\lambda+\rho)(H)v\,, \quad H \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}}\,, \quad 2\rho \;=\; \sum_{\alpha>0,\text{четни}} \alpha \;-\; \sum_{\alpha>0,\text{нечетни}} \alpha\,, \tag{7.126а}$$

$$Xv \;=\; 0\,, \quad x \in \mathcal{G}_-^{\mathbb{C}}\,, \tag{7.126б}$$

където $\mathcal{G}_-^{\mathbb{C}}$ съответства на отрицателните корени ($\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{G}_+^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{G}_-^{\mathbb{C}}$). Достатъчно е (7.126б) да се изисква само за $X = e_{-\alpha}$, α – произволен прост корен, $e_{-\alpha}$ съответства на $-\alpha$. Съответствието с модул с младши вектор (LWM) се изразява със следното равенство [26]:

$$(\hat{X}\mathcal{F})(g) = \frac{d}{ds}\mathcal{F}(g\; exp(s\cdot X))\bigg|_{s=0}\,, \quad X \in \mathcal{G}_a^{\mathbb{C}}\,, \quad s \in \mathcal{A}_a\,, \tag{7.127}$$

Всеки елемент $\mathcal{F}$ може да играе ролята на младши вектор. Тъй като работим с реалната форма $\mathcal{G}$ и с крайномерни представяния на $\mathcal{MA}$, функциите $\mathcal{F}$ удовлетворяват:

$$(e_{\alpha_i})^{k_i}\,\mathcal{F} = 0\,, \quad k_i = -2\,(\lambda,\alpha_i)\,/\,(\alpha_i,\alpha_i) \in \mathbb{N}\,, \tag{7.128}$$

където α_i са простите компактни корени.[9] Изхождайки от (4.23а), модулите LWM са преводими само ако поне едно от всички $4+4N$ условия е изпълнено:

$$2\,(\Lambda,\alpha) \;=\; -k\,(\alpha,\alpha)\;, \quad k \in \mathbb{N}\,, \tag{7.129}$$

където α е некомпактен положителен корен. Ако α е компактен, условието (7.129) е автоматично изпълнено за $k = 2j_1{+}1,\ 2j_2{+}1,\ r_1{+}1,\ldots,r_{N-1}{+}1$ поради (7.128). Експлицитно, условието (7.129) за всички $4N$ на брой нечетни корени е посочено в (5.50).

Винаги, когато (7.129) е изпълнено за някое (α,k), се поражда сплитащ диференциален оператор (нетривиален) $\zeta_\chi \;\to\; \zeta'_\chi$, където χ' се определя от α така:

$$\Lambda' \;=\; \Lambda - 2\,(\Lambda,\alpha)\,/\,(\alpha,\alpha) \;=\; \Lambda + k\alpha \;=\; w_\alpha\Lambda\,, \quad \alpha - \text{четни}\,, \tag{7.130а}$$

$$\Lambda' \;=\; (\Lambda+\alpha)\,, \quad (\Lambda,\alpha) \;=\; 0\,, \quad \alpha - \text{нечетни}\,, \tag{7.130б}$$

което може да се интерпретира като четни и нечетни вайлови отражения, действащи върху теглата (системата от корени не е инвариантна спрямо нечетните отражения).

Конструкцията на инвариантните диференциални оператори взаимства от алгоритъма на алгебричната картина за LWM. Както споменахме в глава 3, когато Λ е преводим за някое (α,k), тогава модулът $\Lambda + k\alpha$ може да се идентифицира с подмодул на Λ, което предполага

[9] Системата от корени се дели освен на четни и нечетни и на компактни и некомпактни. Компактните са тези, които приемат нулеви стойности върху $\mathcal{A}$, а некомпактните – останалите. За $\mathcal{G}$ всички компактни корени са четни [3].

наличието на вектор v_s, наречен сингулярен, различен от младшия вектор на Λ, който обаче има характеристика на младши вектор за $\Lambda + k\alpha$. Този вектор може да бъде представен така [15]:

$$v_s \ = \ \mathcal{P}(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_\ell})v \,, \quad (\ell \ = \ rank\ \mathcal{G}) \,, \tag{7.131}$$

където $\mathcal{P}$ е хомогенен полином на векторите e_{α_i}, съответстващи на простите корени, със степени

$$k\ k_1, \ldots, k\ k_\ell \,, \quad \alpha \ = \ \sum k_i \alpha_i \,, \quad k_i \ = \ 0, 1 \,,$$

където е извършено разлагане на α по прости корени, а k_i са степените, с които участва всеки e_{α_i} .

Следващата стъпка е да се идентифицира диференциалният оператор $\mathcal{D}_\alpha$, съответстващ на сингулярния вектор v_s, чрез замяна на всеки вектор e_α със съответното дясно действие на $\hat{e}_\alpha$ върху $\mathcal{F} \in \zeta_\chi$

$$v_s \longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \mathcal{F} \ = \ \mathcal{P}(\hat{e}_{\alpha_1}, \ldots, \hat{e}_{\alpha_\ell})\mathcal{F} \,. \tag{7.132}$$

Следва списък с условията, които трябва да изпълняват суперполетата $\mathcal{F}$, когато са изпълнени случаите, при които се наблюдава преводимост (5.51), както и явният вид на операторите $\mathcal{D}_\chi$ [8]:

$$d \ = \ d^1_{N1} \,, \qquad \tilde{\mathcal{D}}'^1\ \mathcal{F} \ \equiv \ \left(u^1 \bar{D} \varepsilon \partial / \partial \bar{z}\right)\ \mathcal{F} \ = \ 0 \,, \tag{7.133а}$$

$$d \ = \ d^2_{N1} \,, \qquad \mathcal{D}^1\ \mathcal{F} \ \equiv \ \left(u^1 \bar{D} \bar{z}\right)\ \mathcal{F} \ = \ 0 \,, \tag{7.133б}$$

$$d \ = \ d^3_{NN} \,, \qquad \tilde{\mathcal{D}}'^N\ \mathcal{F} \ \equiv \ \left(\bar{u}^N D \varepsilon \partial / \partial z\right)\ \mathcal{F} \ = \ 0 \,, \tag{7.133в}$$

$$d \ = \ d^4_{NN} \,, \qquad \mathcal{D}^N\ \mathcal{F} \ \equiv \ \left(\bar{u}^N D z\right)\ \mathcal{F} \ = \ 0 \,, \tag{7.133г}$$

където

$$D_{ka} \ \equiv \ \frac{\partial}{\partial \theta^k_a} \ + \ i\bar{\theta}^k_b \tilde{\nabla}_{ba} \,, \qquad \bar{D}_{ka} \ \equiv \ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^k_a} \ - \ i\tilde{\nabla}_{ab} \theta^k_b \,, \qquad \varepsilon \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$k = 1, \ldots, N; \ a, b = 1, 2 \,;$$

$$\tilde{\nabla} \ \equiv \ \tilde{\sigma}_\mu \nabla^\mu \,, \qquad \tilde{\sigma}_\mu \ \equiv \ -\sigma^\mu \,, \qquad \nabla^\mu \ \equiv \ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \,.$$

Приложение. Характери на четната подалгебра

Да припомним структурата на четната подалгебра: $\mathcal{G}_0^{\mathcal{C}} = sl(4) \oplus gl(1) \oplus sl(N) \subset \mathcal{G}^{\mathcal{C}}$. Избираме базис, в който картановата подалгебра $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}^{\mathcal{C}}$ е също картанова подалгебра на $\mathcal{G}_0^{\mathcal{C}}$. Тъй като подалгебрата $\mathcal{G}_0^{\mathcal{C}}$ е редуктивна, съответните формули за характерите ще бъдат дадени чрез произведението на формулите на характерите на двата прости фактора $sl(4)$ и $sl(N)$.

Започваме със случая $sl(4)$. Означихме шестте положителни корени на $sl(4)$ чрез α_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$. За опростяване на формулите за характерите ще използваме означение за формалните експоненти, съответстващо на простите корени на $sl(4)$: $t_j \equiv e(\alpha_{j,j+1})$, $j = 1, 2, 3$; тогава за трите непрости корена получаваме: $e(\alpha_{13}) = t_1 t_2$, $e(\alpha_{24}) = t_2 t_3$, $e(\alpha_{14}) = t_1 t_2 t_3$. Изразена чрез тях, формулата за характерите на Верма–модул над $sl(4)$ е:

$$ch_0\ V^{\Lambda^s} \quad = \quad \frac{e(\Lambda^s)}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)(1-t_1t_2)(1-t_2t_3)(1-t_1t_2t_3)}\,, \tag{П.1}$$

където чрез Λ^s означаваме младшето тегло на $sl(4)$.

Представянията на $sl(4)$, които разглеждаме, са безкрайномерни. Когато $d > d_{\max}$, единствените преводимости за Верма–модула върху $sl(4)$ са свързани с комплексификацията на подалгебрата на Лоренц на $su(2,2)$, т.е. с $sl(2) \oplus sl(2)$, и формулата за характерите се задава чрез произведението на двата характера за крайномерните непреводими представяния на $sl(2)$. Характерът за $sl(4)$ е:

$$\begin{aligned}
ch_0\ L_{\Lambda^s} &= ch_0\ V^{\Lambda^s} - ch_0\ V^{\Lambda^s + n_1\alpha_{12}} - ch_0\ V^{\Lambda^s + n_3\alpha_{34}} + ch_0\ V^{\Lambda^s + n_1\alpha_{12} + n_3\alpha_{34}} = \\
&= \frac{e(\Lambda^s)\ (1-t_1^{n_1})\ (1-t_3^{n_3})}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)(1-t_1t_2)(1-t_2t_3)(1-t_1t_2t_3)} = \\
&= e(\Lambda^s)\ \mathcal{Q}^s_{n_1,n_2}\,, \\
&\quad n_1 = 2j_1 + 1,\ n_3 = 2j_2 + 1, \quad d > d_{\max}\,,
\end{aligned} \tag{П.2}$$

като сме въвели означението $\mathcal{Q}^s_{n_1,n_2}$ за характера, факторизиран по $e(\Lambda^s)$ (виж (5.45)). Горната формула очевидно има вида (4.34) след като заменим $W \mapsto W_2 \times W_2$, където W_2 е вайловата група на $sl(2)$, съдържаща два елемента.

Когато $d \leqq d_{max}$, има допълнителни случаи на четни преводимости – (5.63),(5.64), както и комбинация от тях.

Тогава за редуцирания характер получаваме

$$\begin{aligned}
ch_0\, L_{\Lambda^s} \;=\; & \\
&= e(\Lambda^s)\; \mathcal{Q}^s_{n_1,n_2} \;\cdot\; (1-t_1t_2t_3) \;=\; \frac{e(\Lambda^s)\;(1-t_1^{n_1})\;(1-t_3^{n_3})}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)(1-t_1t_2)(1-t_2t_3)}\,, \\
&\quad \text{за (5.64а)},\quad d \;=\; d^1_{N1} \;=\; d^3_{NN} \;=\; 2+j_1+j_2\,,\quad j_1j_2>0\,; \qquad (\text{П.3а}) \\
&= e(\Lambda^s)\; \mathcal{Q}^s_{1,2} \;\cdot\; (1-t_2t_3) \;=\; \frac{e(\Lambda^s)\;(1-t_3))}{(1-t_2)(1-t_1t_2)(1-t_1t_2t_3)}\,, \\
&\quad \text{за (5.64б)},\quad d \;=\; d^1_{N1} \;=\; d^4_{NN} \;=\; 3/2\,,\quad j_1=0\,, j_2=\frac{1}{2}\,; \qquad (\text{П.3б}) \\
&= e(\Lambda^s)\; \mathcal{Q}^s_{2,1} \;\cdot\; (1-t_1t_2) \;=\; \frac{e(\Lambda^s)\;(1+t_1))}{(1-t_2)(1-t_2t_3)(1-t_1t_2t_3)}\,, \\
&\quad \text{за (5.64г)},\quad d \;=\; d^2_{N1} \;=\; d^3_{NN} \;=\; 3/2\,,\quad j_1=\frac{1}{2}\,, j_2=0\,; \qquad (\text{П.3в}) \\
&= e(\Lambda^s)\; \mathcal{Q}^s_{1,1} \;\cdot\; (1-t_1{t_2}^2t_3) \;=\; \frac{e(\Lambda^s)\;(1-t_1{t_2}^2t_3))}{(1-t_2)(1-t_1t_2)(1-t_2t_1t_3)(1-t_1t_2t_3)}\,, \\
&\quad \text{за (5.64в)}, \text{(5.64д)}, \text{(5.64е)},\quad d \;=\; 1\,,\quad j_1=j_2=0\,. \qquad (\text{П.3г})
\end{aligned}$$

В случая на $sl(N)$, представянията са крайномерни, т.к. са индуцирани от UIRs на $su(N)$. Формулата за характерите е (4.34), което отбелязваме, за да въведем съответното изначение:

$$ch_0\; L_{\Lambda^u}(r_1,\ldots,r_{N-1}) \;=\; \sum_{w\in W_u} (-1)^{\ell(w)}\; ch_0\; V^{w\cdot\Lambda^u}\,,\quad \Lambda^u \in -\Gamma^u_+ \qquad (\text{П.4})$$

Индексът u се използва, за да се отличат величините, които се отнасят за този случай.

Благодарности

Авторът е благодарен на проф. Владимир К. Добрев за неоценимата помощ, без която написването на тази работа би било абсолютно невъзможно.

Литература

[1] R. Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).

[2] M. Flato and C. Fronsdal, Lett. Math. Phys. **8**, 159 (1984).

[3] V.K. Dobrev and V.B. Petkova, Lett. Math. Phys. **9**, 287 (1985).

[4] V.K. Dobrev and V.B. Petkova, Proceedings, eds. A.O. Barut and H.D.Doebner, Lecture Notes in Physics, Vol. 261 (Springer-Verlag, Berlin, 1986) p. 291 and p. 300

[5] S. Minwalla, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 781 (1998).

[6] V.K. Dobrev, J. Phys. **A35** (2002) 7079-7100; hep-th/0201076.

[7] V.K. Dobrev and V.B. Petkova, Fortschr. d. Phys. **35**, 537-572 (1987); first as ICTP Trieste preprint IC/85/29 (March 1985).

[8] V.K. Dobrev and V.B. Petkova, Phys Lett. **162B**, 127 (1985).

[9] V.K. Dobrev, *Characters of the Positive Energy UIRs of D=4 Conformal Supersymmetry*, hep-th/0406154

[10] V.K. Dobrev, *Lectures on Lie (Super) Algebras and Quantum Groups, 1999.*

[11] М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростие алгебри Ли (Мир, Москва, 1981).*

[12] I.T. Todorov, M.C. Mintchev and V.B. Petkova, *Conformal Invariance in Quantum Field Theory* (Scuola Normale Superiore, Pisa, 1978).

[13] W. Siegel, Fields.

[14] V.G. Kac, Lect. Notes in Math. **676** (Springer-Verlag, Berlin, 1978)

[15] J. Dixmier, Enveloping Algebras, (North Holland, New York, 1977).

[16] V.G.Kac, Adv. Math. 26 (1977) 8.

[17] L. Andrianopoli, S. Ferara, E. Sokatchev and B. Zupnik, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 1149 (1999), hep-th/9912007

[18] S. Ferrara and E. Sokatchev, Int. J. Theor. Phys. **40**, 935 (2001), hep-th/0005151.

[19] S. Ferrara and E. Sokatchev, J. High En. Phys. 05 (2000) 038, hep-th/0003051; Int. J. Mod. Phys. **B14**, 2315 (2000), hep-th/0007058; New J. Phys. **4**, 21-220 (2002), hep-th/0110174

[20] B. Eden and E. Sokatchev, Nucl. Phys. **B618**, 259 (2001), hep-th/0106249.

[21] A.V. Ryzhov, J. High En. Phys. 11 (2001) 046, hep-th/0109064; Operators in the D=4, N=4 SYM and the AdS/CFT correspondence, hep-th/0307169, UCLA thesis, 169 pages

[22] E. D'Hoker and A.V.Ryzhov, J. High En. Phys. 02 (2002)047, hep-th/0109065

[23] G. Arutyunov and E. Sokatchev, Nucl. Phys. **B635**, 3-32 (2002), hep-th/0201145

[24] E. D'Hoker, P. Heslop, P. Howe and A.V. Ryzhov, J. High En. Phys. 04 (2003) 038, hep-th/0301104

[25] I.M. Gel'fand and M.I. Graev and N.Ya. Vilenkin, Generalized Functions, Vol. 5 Academic Press, New York 1966).

[26] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetryc Spaces* (Academic Press, New York, 1962).